Ćwiczenia 15.01.2008
Kolokwium nr 12: 21.01.2008, godz. 11.15, s. HS, zad. 1-303

15. Powtórzenie, uzupełnienie

295. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \int_0^x 1\cdot dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{(4-x^2)/3}} 1\cdot dy\,dx$$

po przejściu do współrzędnych eliptycznych (R,ψ) związanych ze współrzędnymi kartezjańskimi zależnościami

$$\begin{cases} x = R\sqrt{3}\cos\psi \\ y = R\sin\psi \end{cases}$$

296. Do każdego ze wzorów **X1-X13** reprezentującego pewną całkę we współrzędnych kartezjańskich dopasuj jeden ze wzorów **Y1-Y52** odpowiadającej mu całki we współrzędnych sferycznych.

Przyjmujemy, że

$$F(\rho,\phi,\theta) = f(\rho\cos\theta\cos\phi,\ \rho\cos\theta\sin\phi,\ \rho\sin\theta)\,\rho^2\cos\theta\,.$$

X1. $$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X2. $$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X3. $$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{2\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2}}^{\sqrt{2\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X4. $$\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X5. $$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X6. $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X7. $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X8. $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X9. $$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X10. $$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X11. $$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X12. $$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{\sqrt{(x^2+y^2)/3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

X13. $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Y1. $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\int\limits_0^{2} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y2. $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\int\limits_0^{1} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y3. $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\int\limits_0^{2} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y4. $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y5. $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\int\limits_0^{2} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y6. $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\int\limits_0^{2} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y7. $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\int\limits_0^{2} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y8. $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_0^{2\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y9. $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y10. $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{4\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y11. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{2\sin\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y12. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\sin\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y13. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{4\sin\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y14. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_0^{4\sin\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y15. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{4\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y16. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^{1/\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y17. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{1/\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y18. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^{2/\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y19. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{2/\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y20. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^{1/\sin\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y21. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{2/\sin\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y22. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \int\limits_0^{2/\sin\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y23. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \int\limits_0^{1/\sin\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y24. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{1/(\sin\theta+\cos\theta)} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y25. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\sin\theta+\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y26. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \int\limits_0^{\sin\theta+cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y27. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{1} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y28. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{0} \int\limits_0^{1} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y29. $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \int\limits_0^{1} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y30. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_0^{1} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y31. $\int\limits_0^{\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_0^{1} F(\rho,\phi,\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Y32. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{0}^{1} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y33. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y34. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{0}\int_{0}^{1} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y35. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{1} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y36. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{1} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y37. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{0}^{1} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y38. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y39. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{-\pi/2}^{0}\int_{0}^{1} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y40. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\sin\theta/\cos^2\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y41. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\sin^2\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

Y42. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin^2\theta/\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Y43. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta/\sin^2\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Y44. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos^2\theta/\sin^2\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Y45. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta/\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Y46. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta/\sin\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Y47. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sin\theta/\cos^2\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Y48. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sin^2\theta/\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Y49. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta/\sin^2\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Y50. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos^2\theta/\sin^2\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Y51. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sin\theta/\cos\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Y52. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta/\sin\theta} F(\rho,\phi,\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

297. Zbadać istnienie granic

$$\textbf{a)}\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^n}{x^6+y^{12}} \qquad\qquad \textbf{b)}\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{xy^{10}z^{30}}{x^2+y^{30}+z^{2n}}$$

w zależności od liczby całkowitej dodatniej n.

298. Wyznaczyć i sklasyfikować punkty krytyczne podanych funkcji

a) $f(x,y)=3x^3+xy+xy^2$ **b)** $g(x,y)=x^3y+xy^3-xy$.

299. Rozstrzygnąć różniczkowalność funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla } x=y=0 \end{cases}$$

w punkcie $(0,0)$.

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (x_0,y_0) wtedy i tylko wtedy, gdy ma w tym punkcie obie pochodne cząstkowe oraz

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \ldots\ldots\ldots$$

300. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi zamkniętymi

a) $\{(\sin t\cos t, \sin t):\ t\in[0,\pi]\}$ **b)** $\left\{\left(\sin t\cos t, \sin^2 t\right):\ t\in[0,\pi]\right\}$.

301. Funkcja różniczkowalna f spełnia warunek

$$f^4(x)+x^4+xf(x)=19$$

dla x bliskich 1, a ponadto $f(1)=2$.

Wyznaczyć $f'(1)$.

302. Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru $n>1$, dla których pole wektorowe

$$\left(x^{8n-1}e^{(n^2+12)y},\ x^{8n}e^{(n^2+12)y}\right)$$

jest bezwirowe, a następnie znaleźć potencjał tego pola dla każdej ze znalezionych wartości n.

303. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^1\int_{x^2}^{x} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx\,.$$

Wskazówka. Przejść do współrzędnych biegunowych.