Ćwiczenia 11.12.2007
Kolokwium nr 9: 17.12.2007, godz. 11.15, s. HS, zad. 1-260

11. Całki powierzchniowe (niezorientowane).

251. Obliczyć $\iint\limits_T |z|\,dS$, gdzie
$$T=\{(R\cos\alpha+r\cos\alpha\cos\beta,\ R\sin\alpha+r\sin\alpha\cos\beta,\ r\sin\beta):\ \alpha,\beta\in[0,2\pi]\}$$
jest torusem o promieniach $r<R$.

252. Obliczyć $\iint\limits_\Omega xy\,dS$, gdzie
$$\Omega=\{(x,\,y,\,x^2+y^2):\ x,y\in[0,1]\}\,.$$

253. Obliczyć $\iint\limits_\Omega z^5\,dS$, gdzie
$$\Omega=\{(x,\,y,\,z):\ x^2+y^2+z^2=1\}\,.$$

254. Obliczyć $\iint\limits_\Omega x^2+y^2\,dS$, gdzie
$$\Omega=\{(x,\,y,\,x^3-3xy^2):\ x^2+y^2\leqslant 1\}$$
jest fragmentem powierzchni zwanej *małpie siodło.*

255. Niech $0<r\leqslant 2R$. Obliczyć pole powierzchni
$$P=\{(x,\,y,\,z):\ x^2+y^2+z^2=R^2\ ,\ x^2+y^2+(z-R)^2\leqslant r^2\}\,.$$
Opisać własnymi słowami, co to za powierzchnia.

256. Obliczyć nie wykonując żadnego całkowania $\iint\limits_\Omega z^2\,dS$, gdzie
$$\Omega=\{(x,\,y,\,z):\ x^2+y^2+z^2=9\}\,.$$

257. Obliczyć nie wykonując żadnego całkowania $\iint\limits_\Omega x^4+2y^2z^2\,dS$, gdzie
$$\Omega=\{(x,\,y,\,z):\ x^2+y^2+z^2=4\}\,.$$

258. Obliczyć nie wykonując żadnego całkowania $\iint\limits_\Omega 2x^2-z\,dS$, gdzie
$$\Omega=\{(x,\,y,\,z):\ x^2+y^2=z\leqslant 37\}\,.$$

259. Obliczyć nie wykonując żadnego całkowania

$$\int\!\!\int_{\Omega} x^6 + ay^4z^2 + bx^2y^2z^2\, dS\,,$$

gdzie

$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1\}\,.$$

Liczby a, b dobrać tak, żeby dało się rozwiązać zadanie.

260. Czas staczania się figury obrotowej Ω z równi pochyłej jest proporcjonalny do $\sqrt{1+\frac{I}{mR^2}}$, gdzie
$m = \int\limits_{\Omega} \rho d\omega$ jest masą,
ρ jest gęstością,
$R = \sup\limits_{(x,y,z)\in\Omega} \sqrt{x^2+y^2}$ jest zewnętrznym promieniem figury - przyjmujemy, że oś OZ jest osią obrotu,
$I = \int\limits_{\Omega} \rho(x^2+y^2) d\omega$ jest momentem bezwładności względem osi obrotu.

Uporządkować następujące figury w/g czasu staczania się z równi:
a) sfera,
b) kula,
c) pełny walec,
d) powierzchnia boczna walca,
e) pusty walec (z podstawami), wysokość = promień podstawy,
f) walec wydrążony, promień wydrążenia = $\frac{1}{2}$ promienia walca,
g) dwa pełne stożki złączone wierzchołkami,
h) dwie powierzchnie boczne stożka złączone wierzchołkami,
i) dwa puste stożki (z podstawami) złączone wierzchołkami, wysokość = promień podstawy.

Uwaga: $\int\limits_{\Omega} \ldots\, d\omega$ oznacza całkę podwójną (powierzchniową) lub potrójną.