10. Wzór Greena. Potencjał.

Ćwiczenia 4.12.2007
Kolokwium nr 8: 10.12.2007, godz. 11.15, s. HS, zad. 1-250

Oznaczenia:
K jest krzywą skierowaną przeciwzegarowo ograniczającą obszar Ω.
$X=(P,Q)$ jest polem wektorowym.
Wzór Greena (wersja rotacyjna):

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\omega(x,y)=\int\limits_{K} P\,dx+Q\,dy$$

Wzór Greena (wersja dywergencyjna):

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)d\omega(x,y)=\int\limits_{K} -Q\,dx+P\,dy$$

Dla podanego pola wektorowego oraz obszaru Ω na płaszczyźnie zastosować wzór Greena w podanej wersji (rot, div lub obydwie) i sprawdzić jego prawdziwość przez bezpośrednie obliczenie całek występujących po obu stronach wzoru

233. $(x,\, y)$, $\Omega=\{(x,y): x^2\leqslant y\leqslant 1\}$, (rot, div)

234. $(y^2,\, x^3)$, $\Omega=[0,1]^2$, (div)

235. $(e^{x-y},\, e^{x-y})$, $\Omega=\{(x,y): x,y\geqslant 0,\ x+2y\leqslant 2\}$, (div)

236. $(x,\, -y)$, $\Omega=\{(x,y):\ 1+y^2+x^2\leqslant 2x+2y\}$, (rot, div)

237. $(xy,\, 0)$, $\Omega=\{(x,y): x,y\in[0,1],\ x^2+y^2\leqslant 1\}$, (rot, div)

238. $(xe^{x^2+y^2},\, ye^{x^2+y^2})$, $\Omega=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}$, (rot, div)

239. $\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $\Omega=\{(x,y): 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$, (rot)

Wsk. Brzeg Ω składa się z 2 okręgów, zewnętrzny jest skierowany przeciwzegarowo, wewnętrzny zegarowo.

240. Zastosować wzór Greena do obliczenia całki

$$\int\limits_K x^{1998} e^{1999y} dx + x^{1999} e^{1999y} dy\,,$$

gdzie

$$K = \{(x,y) : x^2 + 5y^2 = 17\}$$

jest skierowana preciwzegarowo.

241. Zastosować wzór Greena do obliczenia całki

$$\int\limits_K e^{(x+y)^7} dx + e^{(x+y)^7} dy\,,$$

gdzie

$$K = \{(x,y) : x^{1998} + y^{2000} = 1\}$$

jest skierowana preciwzegarowo.

Potencjałem pola wektorowego (na płaszczyźnie lub w przestrzeni) nazywamy funkcję, której to pole jest gradientem. O ile pole wektorowe jest określone w obszarze "bez dziur", potencjał istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy pole jest bezwirowe, czyli ma zerową rotację (bezwirowość pola wektorowego w przestrzeni na razie nie będzie potrzebna). Potencjał jest jedyny, z dokładnością do stałego składnika.

Znaleźć potencjały pól wektorowych (o ile posiadają potencjał)

242. (x, y) **243.** (y, x) **244.** (x^2, y^2) **245.** (y^2, x^2)

246. $(xy^2, x^2y + y^3)$ **247.** (ye^x, e^x) **248.** $(x^9y^{20}, 2x^{10}y^{19})$

249. $\left(\dfrac{y}{1+x^2+y^2}, \dfrac{x}{1+x^2+y^2}\right)$ **250.** $\left(e^x, \dfrac{1}{1+y^2}\right)$

W $\mathbb{R}^3$ obowiązują następujące wzory (na razie nie są potrzebne):

$$\operatorname{rot}(P,Q,R) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{div}(P,Q,R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$