

Ćwiczenia 13, 20.11.2007

Kolokwium nr 5: 19.11.2007, godz. 11.15, s. HS, zad. 1-175

Kolokwium nr 6: 26.11.2007, godz. 11.15, s. HS, zad. 1-222

## 6. Funkcje uwikłane.

Dla danych  $g(x,y)$  i  $(x_0, y_0)$  obliczyć pochodną w punkcie  $x_0$  funkcji  $f$  takiej, że  $g(x, f(x)) = 0$  i  $f(x_0) = y_0$ .

157.  $y^y - x$ , (4,2)      158.  $x^2 + xy + y^2 - 31$ , (5,1)

159.  $x^2 + xy + y^2 - 31$ , (5, -6)      160.  $y^8 + y^7 + x^4y + x^5 - 4$ , (1,1)

## 7. Całki krzywoliniowe.

Obliczyć całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju (nieskierowane)

161.  $\int_A |x| + y ds$ ,  $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

162.  $\int_B x^2 y ds$ ,  $B = \{(x,y) \in A : y \geq 0\}$

163.  $\int_C x^2 ds$ ,  $C = \{(x,y) : x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\}$

164.  $\int_D x ds$ ,  $D = \{(x,y) \in A : x \geq \frac{1}{2}\}$       165.  $\int_D |y| ds$       166.  $\int_D \frac{1}{x^2} ds$

167.  $\int_E \frac{y}{\sqrt{4x^2+1}} ds$ ,  $E = \{(x, x^2) : -1 \leq x \leq 2\}$       168.  $\int_E x^3 ds$

169.  $\int_F x(\arctg y)^7 ds$ ,  $F = \{(x, x^2) : -1 \leq x \leq 1\}$

170.  $\int_G xyz ds$ ,  $G$  - odcinek łączący punkty (1,2,3) i (6,5,4)

Wyznaczyć środki ciężkości krzywych (całki wymagające żmudnych rachunków wziąć z tablic)

171.  $E$       172.  $F$       173.  $H = B \cup \{(x,0) : -1 \leq x \leq 1\}$

174.  $I$  - obwód trójkąta o wierzchołkach (0,0), (1,2) i (3,0)

175.  $J$  - obwód trapezu o wierzchołkach (0,0), (1,1), (2,1) i (3,0)

Obliczyć całki krzywoliniowe drugiego rodzaju (skierowane)

176.  $\int_T \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ ,  $T$  - odcinek od  $(0, -1)$  do  $(2, 2)$   
 177.  $\int_U \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ ,  $U$  - łamana o wierzchołkach  $(0, -1)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(2, 2)$   
 178.  $\int_V \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ ,  $V$  - łamana o wierzchołkach  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 2)$   
 179.  $\int_W \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ ,  $W$  - łamana o wierzchołkach  $(0, -1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 2)$   
 180.  $\int_X \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ ,  $X$  - łamana o wierzchołkach  $(0, -1)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(2, 2)$   
 181.  $\int_T ydx + xdy$     182.  $\int_U ydx + xdy$     183.  $\int_V ydx + xdy$   
 184.  $\int_W ydx + xdy$     185.  $\int_X ydx + xdy$   
 186.  $\int_T y^2 dx + x^2 dy$     187.  $\int_U y^2 dx + x^2 dy$   
 188.  $\int_V y^2 dx + x^2 dy$     189.  $\int_W y^2 dx + x^2 dy$     190.  $\int_X y^2 dx + x^2 dy$

### 8. Całki wielokrotne.

Obliczyć całki wielokrotne

191.  $\int_0^6 \int_{-1}^0 ye^x dx dy$     192.  $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 xy + z dx dy dz$     193.  $\int_2^4 \int_3^7 y \ln x dx dy$   
 194.  $\int_0^{2\pi} \int_1^e (\sin y) x^{1/x} dx dy$     195.  $\int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{x+y} dx dy$     196.  $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin^2(xy) dx dy$

Dokonać zmiany kolejności całkowania. Obliczyć obydwie całki i porównać wyniki

197.  $\int_2^3 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 dx dy$     198.  $\int_1^2 \int_1^y xy dx dy$     199.  $\int_{-1}^1 \int_{|y|-1}^{1-|y|} x + y^2 dx dy$   
 200.  $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} 6x + y dy dx$     201.  $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} y + 2 dy dx$     202.  $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} 3x dy dx$   
 203.  $\int_1^2 \int_{2-x}^{x^2} 1 dy dx$     204.  $\int_{-1}^1 \int_0^{y^2} x^{3/2} dx dy$

Obliczyć całki

205.  $\iint_K e^x d\omega$ ,  $K$  - wnętrze trapezu o wierzchołkach  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,1)$  i  $(3,0)$

206.  $\iint_L xy d\omega$ ,  $L$  - wnętrze trójkąta o wierzchołkach  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  i  $(2,-1)$

207.  $\iint_M x^3 d\omega$ ,  $M = \{(x,y) : 4x^2 + y^2 \leq 4\}$

208.  $\iiint_N x^2 + y d\omega$ ,  $N = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, x+y+z \leq 1\}$

209.  $\iiint_O 1 d\omega$ ,  $O = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0\}$

210.  $\iint_P x^2 d\omega$ ,  $P$  - wnętrze czworokąta krzywoliniowego o wierzchołkach  $(0,0)$ ,  $(2,4)$ ,  $(8,1)$  i  $(-2,-2)$  ograniczonego parabola  $y = x^2$ , hiperbola  $xy = 8$  i dwoma odcinkami prostoliniowymi

211.  $\iint_Q \sqrt{y} d\omega$ ,  $Q$  - obszar ograniczony parabola  $y = x^2$  i prosta  $y = x + 6$

212.  $\iint_R |x^2 - y| d\omega$ ,  $R = [0,1] \times [0,1]$

Wyznaczyć środki ciężkości następujących figur

213.  $K$     214.  $L$     215.  $N$     216.  $O$     217.  $P$     218.  $Q$

219.  $S = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, x+y \leq 1\}$

220. Środek ciężkości wnętrza czworokąta o wierzchołkach  $(-1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  i  $(0,a)$  leży w  $(0,a)$ . Czy środek ciężkości obwodu tego czworokąta znajduje się w jego wnętrzu? A środek ciężkości wierzchołków?

221. Obliczyć  $\int_0^1 \int_y^1 \frac{e^x - 1}{x} dx dy$

222. Powszechnie wiadomo jak litrowym naczyniem w kształcie walca odmierzyć pół litra - wystarczy przechylić je tak, aby płyn zakrywał całe dno i jego poziom był styczny do obwodu dna. A ile płynu zostanie w naczyniu jeśli przechylimy je tak, aby płaszczyzna poziomu płynu przechodziła przez średnicę dna?