

**2. Ciągłość funkcji dwóch zmiennych. Pochodne cząstkowe.**

Ćwiczenia 16.10.2007

Kolokwium nr 2: 22.10.2007, godz. 11.15, s. HS, zad. 1-63

Zbadać ciągłość funkcji dwóch zmiennych - określić, w których punktach funkcje są ciągłe, a w których nieciągłe

$$26. f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla } x \geq y \\ x - y & \text{dla } x < y \end{cases}$$

$$27. f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

$$28. f(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 2 & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

$$29. f(x,y) = \operatorname{sgn}(x+y)$$

$$30. f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$31. f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$32. f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} & \text{dla } x, y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \\ 0 & \text{dla } \{x,y\} \cap \mathbb{R}_- \neq \emptyset \end{cases}$$

$$33. f(x,y) = y \cdot \operatorname{sgn} x \quad 34. f(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{dla } y > x^2 \\ x & \text{dla } y = x^2 \\ y & \text{dla } y < x^2 \end{cases}$$

Zbadać istnienie następujących granic, obliczyć wartość, jeśli granica istnieje

$$35. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} (x-3)(\ln y - \ln 4) \quad 36. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{\ln y - \ln 4}{x-3}$$

$$37. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{e^{(x-3)^2 + (y-4)^2} - 1}{(x-3)^2 + (y-4)^2} \quad 38. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{y-x^2}$$

39.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0}} e^{y/x^2}$       40.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0}} e^{y^2/x}$       41.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ |y| \leq x^2}} \frac{xy}{x^4 + y^4}$
42.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2)$       43.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$
44.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ |y| \leq |x|}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$       45.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ |x| \leq |y|}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$
46.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} x^y$       47.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0+}} x \ln y$       48.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} x \ln y$
49.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 5}} \frac{y}{y^2 + 1}$       50.  $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0+}} \frac{y^2}{y^2 + z}$
51.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0}} \frac{y^2}{x}$       52.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0 \\ |y| \leq x}} \frac{y^2}{x}$       53.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0 \\ |y| \leq x}} \frac{y}{x}$

Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji

54.  $f(x, y) = \frac{x^{10} y^{20}}{x^2 + y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$       55.  $f(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{x}$ ,  $f(0, y) = y$
56.  $f(x, y) = x^7 y^9 + x e^{xy}$       57.  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^3)$
58.  $f(x, y) = x^y$       59.  $f(x, y) = x^{y^x}$
60.  $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x}$ ,  $f(0, y) = y$
61.  $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ ,  $f(0, 0) = 0$
62.  $f(x, y) = \frac{(\cos x - 1) \sin y}{x}$ ,  $f(0, y) = 0$ .

63. Obliczyć pochodną cząstkową rzędu pierwszego względem  $x$  funkcji  $f$  danej wzorami

$$f(x, y) = \frac{(e^x - 1)(e^y - 1)}{xy}, \quad f(x, 0) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad f(y, 0) = \frac{e^y - 1}{y}, \quad f(0, 0) = 1.$$