

1. Elementy topologii metrycznej, funkcje dwóch zmiennych.

Ćwiczenia 9.10.2007

Kolokwium nr 1 15.10.2007, godz. 11.15, s. HS, zad. 1-25

1. Co oznaczają poniższe napisy?

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,p) < M\}$$

$$\left\{x \in Z : \bigvee_{\delta > 0} K(x,\delta) \cap Z \neq \emptyset\right\}$$

$$\bigvee_{x \in Z} \bigvee_{\delta > 0} K(x,\delta) \subset Z$$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \bigvee_{\delta > 0} K(x,\delta) \subset Z\right\}$$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \bigvee_{\delta > 0} K(x,\delta) \cap Z \neq \emptyset\right\}$$

$$\left\{x \in Z : \bigvee_{\delta > 0} K(x,\delta) \subset Z\right\}$$

$$\bigvee_{\delta > 0} K(x,\delta) \cap Z \neq \emptyset$$

$$\sup\{d(x,y) : x,y \in Z\}$$

$$\inf\{d(x,y) : x \in Z\} = 0$$

$$\sup\{d(x,y) : x \in Z\} = 0$$

Kolejne zadania dotyczą płaszczyzny z metryką euklidesową. Czy zbiór  $Z$  jest otwarty, domknięty, ograniczony, zwarty? Ile wynosi jego średnica? Opisać lub naszkicować jego wnętrze, domknięcie, brzeg. Zmienne  $x, y$  przebiegają liczby rzeczywiste.

2.  $Z = \{(x, y) : y = 0\} \cup \{(0, 1)\}$
3.  $Z = \{(x, y) : 0 < y < 1\} \cup \{(0, 1), (1, 1)\}$
4.  $Z = \{(x, y) : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\} \cup \{(x, x) : -1 \leq x \leq 0\}$
5.  $Z = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\} \setminus \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$
6.  $Z = \{(x, y) : 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1\} \cup \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$
7.  $Z = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

8. Punktem izolowanym zbioru  $Z$  nazywamy taki punkt  $x \in Z$ , że  
$$x \notin \text{Cl}(Z \setminus \{x\}).$$

Podać przykład zbioru, którego wszystkie punkty oprócz jednego są izolowane.

9. Podać przykład podzbioru płaszczyzny, który nie jest otwarty w metryce euklidesowej, ale jest otwarty w metryce "rzeka".
10. Podać przykład podzbioru płaszczyzny, który nie jest domknięty w metryce euklidesowej, ale jest domknięty w metryce "centrum".

Opisać lub naszkicować zbiór będący dziedziną funkcji dwóch zmiennych. Czy dziedzina jest otwarta, domknięta, ograniczona, zwarta?

11.  $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}}$
12.  $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$
13.  $f(x, y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$
14.  $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$
15.  $f(x, y) = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4}$
16.  $f(x, y) = \sqrt{x \sin y}$
17.  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$
18.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x + 2}$
19.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x^2 + y}$
20.  $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$
21.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$
22.  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9)$
23.  $f(x, y) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos y}$
24.  $f(x, y) = \ln(xy)$
25.  $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$