

Kolokwium nr 3.

Odbędzie się na ćwiczeniach w dniu 31.10.2006.

Zakres materiału: zad. 1-121.

5. Powtórka ze szkoły.

Konwersatorium 24.10.2006

67. Uprościć wyrażenie $4^{2+\log_2 7}$.

68. Uprościć wyrażenie $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$.

Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

69. $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$? 70. $\log_2 3$ czy $\log_3 5$

71. $\log_3 7$ czy $\log_5 19$ 72. $\log_2 3$ czy $\log_5 13$

Rozwiązać równania i nierówności

73. $\log_x(1+x^2) \leq 1 + \log_x \frac{5}{2}$ 74. $\log_x(1+x) < 1$

75. $\log_4 x^2 \cdot \log_x 3 \cdot \log_{27} 8 \geq x$ 76. $\log_{x+x^2}(3x) \leq \log_{x+x^2}(x^2+2)$

77. $\log_{|x-4|}(x+1) + \log_{|x-4|}(x-1) \leq \log_{|x-4|} 20$

78. $\log_x 2 - \log_2 x \leq 1$

6. Liczby wymierne i niewymierne.

Ćwiczenia 25.10.2006

79. Przedstawić liczbę $0,123(45)$ w postaci ułamka zwykłego.

80. Przedstawić liczbę $0,1(270)$ w postaci ułamka zwykłego.

Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

81. $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$ 82. $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$

83. Obliczyć wartość wyrażenia $(0,(037))^{0,(3)}$ podając wynik w postaci ułamka zwykłego.

84. Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

85. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest niewymierna.

86. Dowieść, że liczba $\sqrt{\log_4 9}$ jest niewymierna.

87. Dowieść, że liczba $\log_6 10$ jest niewymierna.

88. Rozstrzygnąć czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

89. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ jest niewymierna.

OSZUSTWO 90.

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3 - \sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$w = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w + 1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

91. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b$ jest niewymierna?

92. Dla jakich liczb naturalnych m i n większych od 1 liczba

$$\frac{\log_m(mn) \cdot \log_n(mn)}{\log_m(mn) + \log_n(mn)}$$

jest wymierna, a dla jakich niewymierna?

93. Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ jest wymierna, czy niewymierna?

94. Czy liczba

$$2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$$

jest wymierna, czy niewymierna?

95. Dowieść, że liczba $\log_8 100$ jest niewymierna.

96. Czy dla dowolnych liczb naturalnych m i n większych od 1 liczba $\log_m n$ jest całkowita lub niewymierna?

97. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

98. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

99. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

100. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

Wskazówka: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + (a+b) \cdot \text{coś}$.

101. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n , liczby całkowite oraz znaki $+$, $-$, $:$, $;$ i $\sqrt{\quad}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

TEST: 20 przykładów.

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być zaliczone.

Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x , że

102. $0 < x < 1$ oraz x jest niewymierna,
103. $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,
104. x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,
105. x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,
106. $(x+1)^2$ jest niewymierna,
107. x jest niewymierna, ale $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna,
108. x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,
109. $2^x + 3^x$ jest liczbą niewymierną,
110. $2^x + 3^x$ jest liczbą wymierną,
111. $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
112. $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
113. $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
114. $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
115. $2^x + \log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,
116. $2^x + \log_2 x$ jest liczbą niewymierną,
117. $x + \log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
118. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
119. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,
120. $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,
121. $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.