Zajęcia w czerwcu:

4.06.2007 - zajęcia w/g planu czwartkowego, czyli wykład 13-15, s. HS

5.06.2007 - zajęcia jak w każdy wtorek, w tym ostatnie kolokwium

poniedziałek 11.06.2007 godz. 12-14, wtorek 12.06.2007 godz. 10-12, czwartek 14.06.2007 godz. 13-15 - ćwiczenia w sali HS z dr. Rzeszotnikiem (obie grupy) [37]

Innych zajęć z analizy niż wymienione powyżej, w czerwcu nie będzie.

Egzamin:

Wtorek 3 lipca, godz. 13-16, s. HS

11. Liczby zespolone.

Ćwiczenia: 28.05.2007

Kolokwium nr 11: 29.05.2007 (zad. 442-906)

871. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

jeśli $b \neq 0$.

Rozwiązać równania, nierówności i układy równań.

872. $\overline{z} = z^2$ **873.** $\overline{z} = z^{-1}$ **874.** $1+i = z^2$ **875.** $3+4i = z^2$

876. $-3+4i = z^2$ **877.** $z^2+z = i$ **878.** $z^2+iz = 1$

879. $z^2-(3+5i)z+(-4+7i) = 0$ **880.** $z = \overline{z}+1$ **881.** $z^2\overline{z} = 8i$

[37] Czy po dr stawiamy kropkę ?

882. $z^4+10z^2+61=0$ **883.** $\begin{cases} z_1^2=z_2 \\ z_2^2=z_1 \end{cases}$ **884.** $\begin{cases} z_1^2+z_2^2=1 \\ z_1+z_2=-1 \end{cases}$

885. $\begin{cases} z_1+iz_2=1 \\ z_2+iz_1=2 \end{cases}$ **886.** $\begin{cases} z_1+\overline{z_2}=1 \\ \overline{z_1}+z_2=i \end{cases}$

887. $z^5=1$ (**Wsk.** $z^4+z^3+z^2+z+1=(z^2+az\pm1)(z^2+bz\pm1)$)

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

888. $\mathrm{Re}z+\mathrm{Re}z^2\geqslant 0$ **889.** $3|z|\leqslant|z^2|+1$ **890.** $|z|=|\overline{z}+1|$

891. $|z+i|\leqslant|z-i|$ **892.** $\mathrm{Im}\frac{z}{z^2+1}=0$ **893.** $\mathrm{Re}\frac{z+1}{z}=0$

Wyrazić przy pomocy $\sin x$ i $\cos x$:

894. $\sin 8x$ **895.** $\cos 4x$

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję f zdefiniowaną wzorem

896. $f(x)=\sin^5 x$ **897.** $f(x)=\cos^4 x$ **898.** $f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x$

899. $f(x)=\sin 7x\cdot\cos 8x\cdot\sin 9x$

Uprościć wyrażenia tak, aby zawierały tylko jeden arctg

900. $\mathrm{arctg}3+\mathrm{arctg}7$ **901.** $\mathrm{arctg}4-\mathrm{arctg}2$

Znaleźć wzory wyrażające następujące sumy:

902. $\sum_{n=1}^{N}\sin nx$ **903.** $\sum_{n=1}^{N}\cos 5nx$

904. $\sum_{n=1}^{N}\cos nx\sin^2 nx$ **905.** $\sum_{n=1}^{N}\sin^3 nx$

Wskazówka: Zastosować wzór

$$\sin nx=\mathrm{Im}(\cos nx+i\sin nx)=\mathrm{Im}((\cos x+i\sin x)^n)\ ,$$

a następnie skorzystać ze wzoru na sumę postępu geometrycznego.

906. W trójkącie prostokątnym PQD kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ=1$ i $PD=4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD, punkt A jest środkiem odcinka PC, punkt B jest środkiem odcinka AC. Punkt E leży na prostej PD, przy czym

$$\sphericalangle PQA+\sphericalangle PQB+\sphericalangle PQC=\sphericalangle PQD+\sphericalangle PQE\,.$$

Obliczyć PE.

12. Szeregi o wyrazach zespolonych.

Ćwiczenia: 29.05.2007, 5.06.2007

Kolokwium nr 12: 5.06.2007 (zad. 442-924)

Kryteria zbieżności

Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli z_n nie dąży do 0, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$.

Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$.

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z, że $|z|=1$ oraz $z\neq 1$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z|<1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}(z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n \,.$$

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c\neq 0$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cz_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c\sum_{n=1}^{\infty} z_n \,.$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} z_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} z_n \,.$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0, +\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R = 0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R = +\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

Zbadać zbieżność szeregów:

907. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1}$ **908.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + i}$ **909.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i}$

910. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + i}$ **911.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + i}{n^2 + i}$

Znaleźć wzory wyrażające następujące sumy:

912. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ **913.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$

Znaleźć obszar zbieżności szeregów potęgowych:

914. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ **915.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2}$ **916.** $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

917. $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$ **918.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i+2)^n z^n}{n}$ **919.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{3n}}{n}$

920. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i+2)^{4n+3} z^{2n}}{n}$ **921.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+11i)^{n+8} z^{3n}}{\sqrt{n^2+n} - n}$

922. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{4n+3} z^n}{n^2 (i+2)^n}$ **923.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+i) z^n}{n^2}$ **924.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n+i}$