Ćwiczenia: 14,15.05.2007

Kolokwium nr 9: 15.05.2007 (zad. 442-815)

9. Całki niewłaściwe - c.d.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

796. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$ **797.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x}$ **798.** $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x-\sin\sqrt{x+28}}$

799. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ **800.** $\int\limits_0^\infty \frac{1+\sqrt{x+|\ln x|}}{x}dx$ **801.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

802. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ **803.** $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+\operatorname{arctg} x}dx$ **804.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+\sin^2 x}$

805. $\int\limits_1^\infty e^{-1/x}dx$ **806.** $\int\limits_0^\infty \sqrt{x+1}-\sqrt{x}dx$ **807.** $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Oszustwo **808.** (funkcja ciągła nieujemna mająca całkę mniejszą od zera):

Niech

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

Bez trudu można sprawdzić, że f jest ciągła w zerze, a zatem obliczenie całki $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ nie powinno nastręczać trudności. Ponieważ

$$f(x)=\frac{1}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})}$$

poza pojedynczym punktem $x=0$, po wykonaniu podstawienia $t=e^{1/x}$ otrzymujemy

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})}=-\int\limits_{1/e}^{e}\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\mathrm{arctg}t\Big|_{1/e}^{e}=-\mathrm{arctg}e+\mathrm{arctg}\frac{1}{e}=\frac{\pi}{2}-2\mathrm{arctg}e<0$$

Wyjaśnić, na czym polega oszustwo i obliczyć prawdziwą wartość całki $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartość tych, które są zbieżne

809. $\displaystyle\int\limits_{-2}^{1}\frac{e^{1/x}}{x^2(e^{2/x}+e^{-2/x}+2)}dx$ **810.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\ln|x|dx$

Użyć kryterium całkowego do rozstrzygnięcia zbieżności następujących szeregów

811. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt[7]{n}}}$ **812.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^a n}$ w zależności od $a>0$

813. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ **814.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ **815.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

816. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=\frac{1}{n}$, ale całka $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

817. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=\frac{1}{n^2}$, ale całka $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

818. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=n$, ale całka $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

819. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=0$, ale całka $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

820. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=e^n$, ale całka $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

Co możemy powiedzieć o zbieżności (*zbieżne, rozbieżne, nie wiadomo*) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ lub całek $\int\limits_0^1 f(x)dx$ i $\int\limits_1^{\infty} g(x)dx$, gdzie $f\in C(0,1]$ i $g\in C[1,\infty)$, jeśli wiadomo, że

821. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ **822.** $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ **823.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

824. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ **825.** $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1$ **826.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

827. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ **828.** $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=+\infty$ **829.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

830. Ciąg (a_n) nie jest zbieżny do 0.

831. $g(x)$ nie dąży do 0 przy $x\to\infty$.

832. $f(x)$ nie dąży do 0 przy $x\to 0$.

833. Ciąg (a_n) jest ograniczony. **834.** ... nie jest ograniczony.

835. Funkcja g jest ograniczona. **836.** ... nie jest ograniczona.

837. Funkcja f jest ograniczona. **838.** ... nie jest ograniczona.

839. Szereg $\sum\limits_{n=2007}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. **840.** ... jest rozbieżny.

841. Całka $\int\limits_{2007}^{\infty} g(x)dx$ jest zbieżna. **842.** ... jest rozbieżna.

843. Całka $\int\limits_{0}^{1/2007} f(x)dx$ jest zbieżna. **844.** ... jest rozbieżna.

845. $a_n=n^p$ - dać odpowiedź w zależności od p.

846. $g(x)=x^p$ - dać odpowiedź w zależności od p.

847. $f(x)=x^p$ - dać odpowiedź w zależności od p.

848. $a_n=p^n$ - dać odpowiedź w zależności od p.

849. $g(x)=p^x$ - dać odpowiedź w zależności od $p>0$.

850. $f(x)=p^x$ - dać odpowiedź w zależności od $p>0$.