6. Całka oznaczona - podstawy.

Ćwiczenia: 16.04.2007

Kolokwium nr 6: 17.04.2007 **9.15-10.00** (zad. 442-697)

Ćwiczenia: 17,23,24.04.2007

Kolokwium nr 7: 24.04.2007 **11.15-12.00** (zad. 442-750)

Dodatkowe wykłady: poniedziałki 16,23.04.2007 godz. 14-16 sala A

Nie odbędą się zajęcia: wtorek 17.04.2007 godz. 11-12, czwartek 19.04.2007 godz. 13-15

680. Andzia ma przygotować referat dotyczący całki oznaczonej. Andzia chce podać następujące wzory zachodzące dla funkcji ciągłej f na przedziale $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n},\, a+k\frac{b-a}{n}\right]} f(x) \qquad (A)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n},\, a+k\frac{b-a}{n}\right]} f(x) \qquad (B)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \qquad (C)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \qquad (D)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-1/2)\frac{b-a}{n}\right) \qquad (E)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \qquad (F)$$

Andzia poprosiła Dzidzię o wykonanie rysunków ilustrujących powyższe wzory. Niestety Dzidzia nie napisała, który rysunek odpowiada któremu wzorowi.

Pomóż Andzi przyporządkować rysunki odpowiednim wzorom.

Podać wzór na $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$ oraz obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$

681. $f(x)=1$, $a=5$, $b=8$ **682.** $f(x)=x$, $a=0$, $b=1$

683. $f(x)=x$, $a=1$, $b=5$ **684.** $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=5$

685. $f(x)=x^3$, $a=0$, $b=1$ **686.** $f(x)=2x+5$, $a=-3$, $b=4$

687. $f(x)=x^2+1$, $a=-1$, $b=2$ **688.** $f(x)=x^3+x$, $a=0$, $b=4$

689. $f(x)=e^x$, $a=0$, $b=1$

Obliczyć następujące całki poprzez konstrukcję ciągu podziałów dziedziny oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna

690. $\int\limits_2^4 x^{10}dx$ **(Wsk.** $2\cdot 2^{k/n}$) **691.** $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ **(Wsk.** $e^{k/n}$)

692. $\int\limits_0^{20} xdx$ **693.** $\int\limits_1^{10} e^{2x}dx$ **694.** $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}dx$ **(Wsk.** $\frac{k^3}{n^3}$)

695. $\int\limits_{-1}^1 |x|dx$ **696.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ **(Wsk.** $2^{k/n}$) **697.** $\int\limits_0^4 \sqrt{x}dx$ **(Wsk.** $\frac{4k^2}{n^2}$)

Obliczyć całki oznaczone:

698. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x^{2007}dx$ **699.** $\int\limits_0^2 \mathrm{arctg}[x]dx$ **700.** $\int\limits_0^2 [\cos x^2]dx$

701. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}dx$ **702.** $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3}dx$ **703.** $\int\limits_{-13}^{2} \frac{1}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}dx$

704. $\int\limits_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ **705.** $\int\limits_0^3 \mathrm{sgn}(x^3-x)dx$ **706.** $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$

707. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx$ **708.** $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx$ **709.** $\int\limits_0^{\pi} x^3 \sin x dx$

710. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$ **711.** $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ **712.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$

713. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ **714.** $\int\limits_0^5 |x^2-5x+6|dx$ **715.** $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$

716. $\int\limits_1^2 x\log_2 x dx$ **717.** $\int\limits_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx$ **718.** $\int\limits_0^{6\pi} |\sin x|dx$

719. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \sin^{11} x dx$ **720.** $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

721. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^{2007}\cos x dx$ **722.** $\int\limits_0^{2\pi} (x-\pi)^{2007}\cos x dx$

Udowodnić następujące oszacowania

723. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx<2$ **724.** $\frac{1}{5}<\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+1}dx<\frac{1}{2}$

725. $\frac{1}{11}<\int\limits_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x}<\frac{1}{8}$ **726.** $\int\limits_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2}dx<\frac{3}{2}$

727. $\int\limits_0^1 x(1-x^{99+x})dx<\frac{1}{2}$ **728.** $2\sqrt{2}<\int\limits_2^4 x^{1/x}dx$

729. $5<\int\limits_1^3 x^x dx<31$ **730.** $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx<\frac{3}{4}$

Obliczyć granice

731. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$ **732.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^{20}+2^{20}+3^{20}+\ldots+n^{20}}{n^{21}}$

733. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)\cdot n$

734. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{3n}}$

735. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\sin\frac{3}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

736. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n}+\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n+2}+\ldots+\sqrt{5n}\right)\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}$

737. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{8n}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

738. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[6]{n}\cdot(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+...+\sqrt[3]{2n})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+...+\sqrt{2n}}$

739. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\frac{n}{n^2+16}+...+\frac{n}{n^2+n^2}$

740. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{5n}+\frac{4}{5n+3}+\frac{4}{5n+6}+\frac{4}{5n+9}+...+\frac{4}{26n}$

741. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7n}+\frac{1}{7n+2}+\frac{1}{7n+4}+\frac{1}{7n+6}+...+\frac{1}{9n}$

742. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7n^2}+\frac{1}{7n^2+1}+\frac{1}{7n^2+2}+\frac{1}{7n^2+3}+...+\frac{1}{8n^2}$

743. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(e^{\sqrt{\frac{1}{n}}}+e^{\sqrt{\frac{2}{n}}}+e^{\sqrt{\frac{3}{n}}}+...+e^{\sqrt{\frac{n}{n}}})$

744. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\frac{1}{\sqrt{n+6}}+\frac{1}{\sqrt{n+9}}+...+\frac{1}{\sqrt{7n}})\frac{1}{\sqrt{n}}$

745. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+0}{(3n)^3}+\frac{n^2+1}{(3n+1)^3}+\frac{n^2+2}{(3n+2)^3}+\frac{n^2+3}{(3n+3)^3}+...+\frac{n^2+n}{(4n)^3}$

746. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2}+\frac{n}{2(n+1)^2}+\frac{n}{2(n+2)^2}+\frac{n}{2(n+3)^2}+...+\frac{n}{50n^2}$

747. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2}+\frac{n}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{n^2+(n+2)^2}+\frac{n}{n^2+(n+3)^2}+...+\frac{n}{50n^2}$

748. Udowodnić oszacowanie $\frac{19}{3}<\int\limits_2^3 x^x dx<\frac{65}{4}$. **Wskazówka:** Oszacować x^x przez x^a.

Obliczyć granice

749. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}\sqrt{3n}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{3n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}\sqrt{3n+2}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}\sqrt{3n+3}}+...+\frac{1}{\sqrt{3n}\sqrt{4n}}$

Wskazówka: Niewymierność $\sqrt{(x+a)(x+b)}$ całkujemy wykonując podstawienie $t=\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$.

750. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\sin(n^2+0^2)}{n^2+0^2}+\frac{n+\sin(n^2+1^2)}{n^2+1^2}+\frac{n+\sin(n^2+2^2)}{n^2+2^2}+\frac{n+\sin(n^2+3^2)}{n^2+3^2}+...$
$...+\frac{n+\sin(n^2+n^2)}{n^2+n^2}$ **Wskazówka:** Skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.