

## 6. Całka oznaczona - podstawy.

Ćwiczenia: 16.04.2007

Kolokwium nr 6: 17.04.2007 **9.15-10.00** (zad. 442-697)

Ćwiczenia: 17,23,24.04.2007

Kolokwium nr 7: 24.04.2007 **11.15-12.00** (zad. 442-750)

Dodatkowe wykłady: poniedziałki 16,23.04.2007 godz. 14-16 sala A

Nie odbędą się zajęcia: wtorek 17.04.2007 godz. 11-12, czwartek 19.04.2007 godz. 13-15

**680.** Andzia ma przygotować referat dotyczący całki oznaczonej. Andzia chce podać następujące wzory zachodzące dla funkcji ciągłej  $f$  na przedziale  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}]} f(x) \quad (A)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}]} f(x) \quad (B)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad (C)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad (D)$$

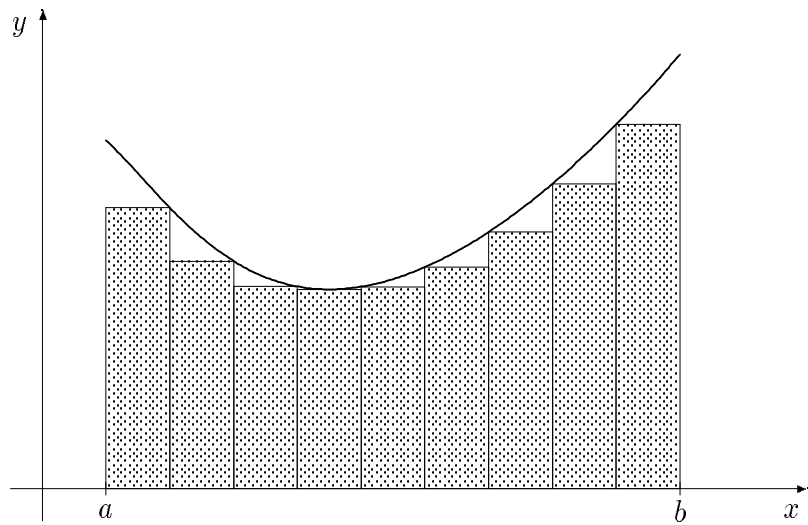
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+(k-1/2)\frac{b-a}{n}\right) \quad (E)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \right) \quad (F)$$

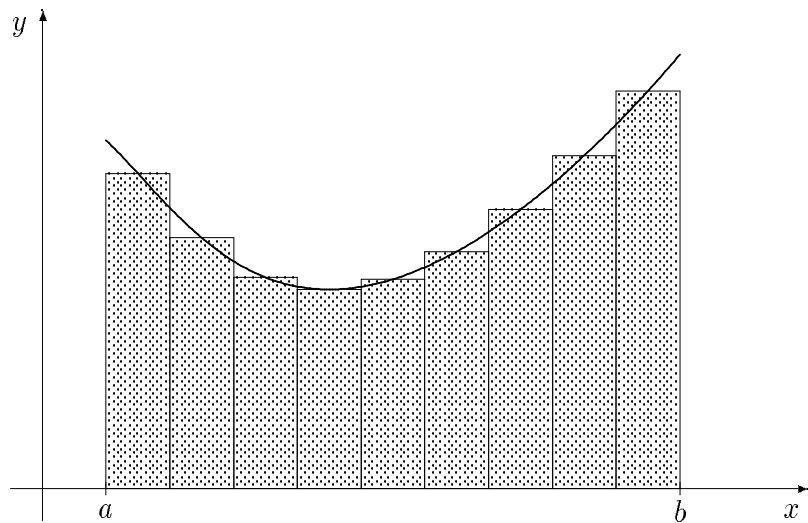
Andzia poprosiła Dzięcioła o wykonanie rysunków ilustrujących powyższe wzory. Niestety Dzięcioła nie napisała, który rysunek odpowiada któremu wzorowi.

Jarosław Wróblewski

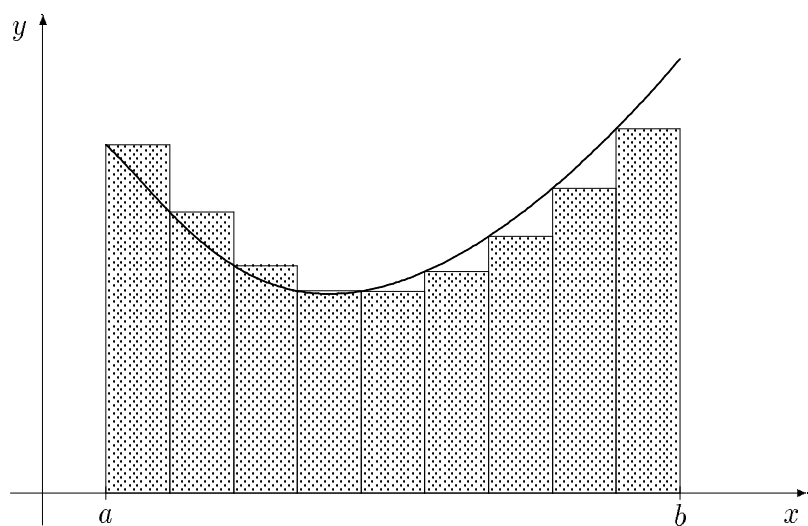
Pomóż Andzi przyporządkować rysunki odpowiednim wzorom.



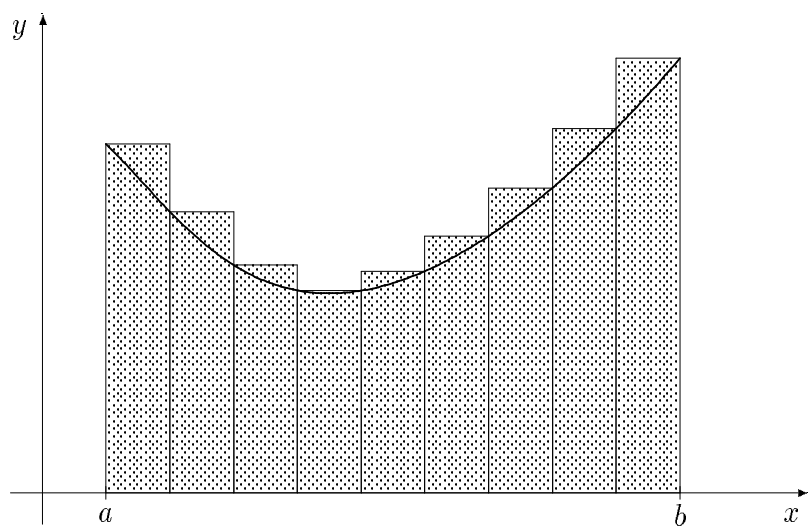
rys. 1



rys. 2

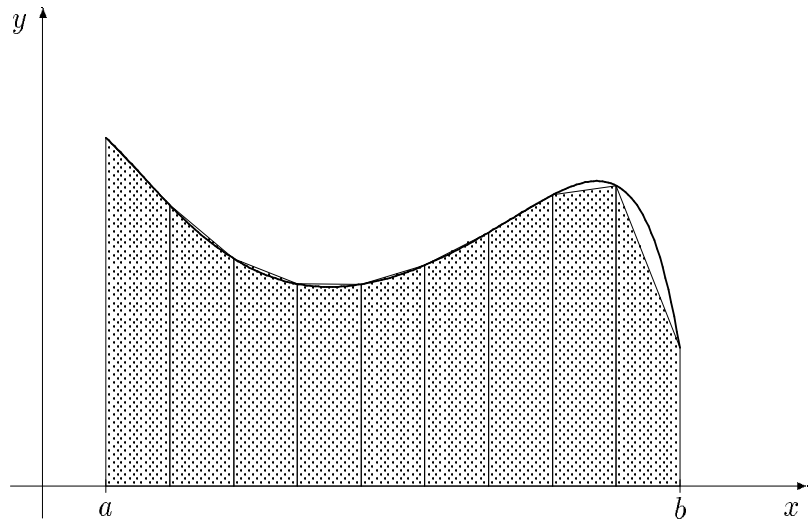


rys. 3

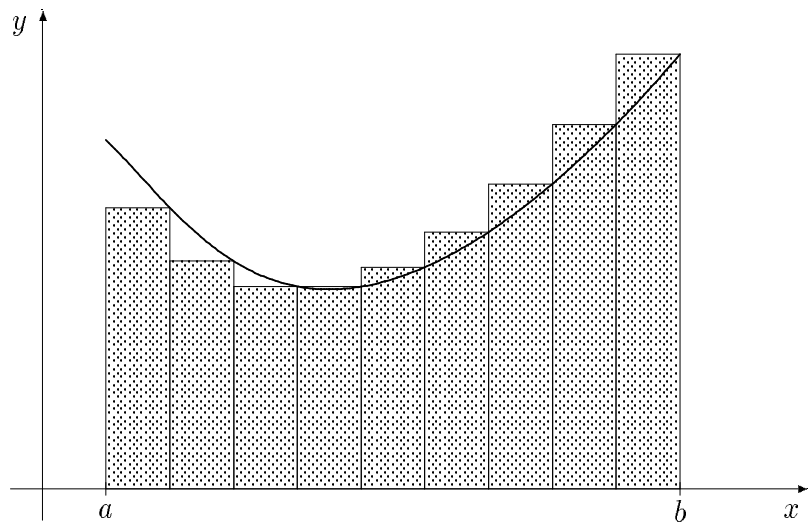


rys. 4

*Jarosław Wróblewski*



rys. 5



rys. 6

Podać wzór na  $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$  oraz obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

681.  $f(x) = 1$ ,  $a = 5$ ,  $b = 8$       682.  $f(x) = x$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$   
 683.  $f(x) = x$ ,  $a = 1$ ,  $b = 5$       684.  $f(x) = x^2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 5$   
 685.  $f(x) = x^3$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$       686.  $f(x) = 2x + 5$ ,  $a = -3$ ,  $b = 4$   
 687.  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 2$       688.  $f(x) = x^3 + x$ ,  $a = 0$ ,  $b = 4$   
 689.  $f(x) = e^x$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$

Obliczyć następujące całki poprzez konstrukcję ciągu podziałów dziedziny oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna

690.  $\int_2^4 x^{10} dx$  (Wsk.  $2 \cdot 2^{k/n}$ )      691.  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$  (Wsk.  $e^{k/n}$ )  
 692.  $\int_0^{20} x dx$       693.  $\int_1^{10} e^{2x} dx$       694.  $\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$  (Wsk.  $\frac{k^3}{n^3}$ )  
 695.  $\int_{-1}^1 |x| dx$       696.  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$  (Wsk.  $2^{k/n}$ )      697.  $\int_0^4 \sqrt{x} dx$  (Wsk.  $\frac{4k^2}{n^2}$ )

Obliczyć całki oznaczone:

698.  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x^{2007} dx$       699.  $\int_0^2 \arctg[x] dx$       700.  $\int_0^2 [\cos x^2] dx$   
 701.  $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$       702.  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3} dx$       703.  $\int_{-13}^2 \frac{1}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} dx$   
 704.  $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$       705.  $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x^3 - x) dx$       706.  $\int_0^1 x e^{-x} dx$   
 707.  $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$       708.  $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$       709.  $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$   
 710.  $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx$       711.  $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$       712.  $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$

$$713. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} \quad 714. \int_0^5 |x^2 - 5x + 6| dx \quad 715. \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$716. \int_1^2 x \log_2 x dx \quad 717. \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx \quad 718. \int_0^{6\pi} |\sin x| dx$$

$$719. \int_0^{\pi/2} \cos x \sin^{11} x dx \quad 720. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$$

$$721. \int_{-\pi}^{\pi} x^{2007} \cos x dx \quad 722. \int_0^{2\pi} (x - \pi)^{2007} \cos x dx$$

Udowodnić następujące oszacowania

$$723. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx < 2 \quad 724. \frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1} dx < \frac{1}{2}$$

$$725. \frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8} \quad 726. \int_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2} dx < \frac{3}{2}$$

$$727. \int_0^1 x(1-x^{99+x}) dx < \frac{1}{2} \quad 728. 2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{1/x} dx$$

$$729. 5 < \int_1^3 x^x dx < 31 \quad 730. \int_1^2 \frac{1}{x} dx < \frac{3}{4}$$

Obliczyć granice

$$731. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \quad 732. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{21}}$$

$$733. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \cdot n$$

$$734. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{3n}}$$

$$735. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \sin \frac{3}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n} \right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$736. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n} + \sqrt{4n+1} + \sqrt{4n+2} + \dots + \sqrt{5n}) \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$737. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$738. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n} \cdot (\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \dots + \sqrt[3]{2n})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}$$

739.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \frac{n}{n^2+16} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$

740.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5n} + \frac{4}{5n+3} + \frac{4}{5n+6} + \frac{4}{5n+9} + \dots + \frac{4}{26n}$

741.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n} + \frac{1}{7n+2} + \frac{1}{7n+4} + \frac{1}{7n+6} + \dots + \frac{1}{9n}$

742.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n^2} + \frac{1}{7n^2+1} + \frac{1}{7n^2+2} + \frac{1}{7n^2+3} + \dots + \frac{1}{8n^2}$

743.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e\sqrt{\frac{1}{n}} + e\sqrt{\frac{2}{n}} + e\sqrt{\frac{3}{n}} + \dots + e\sqrt{\frac{n}{n}})$

744.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+6}} + \frac{1}{\sqrt{n+9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{7n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$

745.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+0}{(3n)^3} + \frac{n^2+1}{(3n+1)^3} + \frac{n^2+2}{(3n+2)^3} + \frac{n^2+3}{(3n+3)^3} + \dots + \frac{n^2+n}{(4n)^3}$

746.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{2(n+1)^2} + \frac{n}{2(n+2)^2} + \frac{n}{2(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$

747.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{n^2+(n+2)^2} + \frac{n}{n^2+(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$

748. Udowodnić oszacowanie  $\frac{19}{3} < \int_2^3 x^x dx < \frac{65}{4}$ . **Wskazówka:** Oszacować  $x^x$  przez  $x^a$ .

Obliczyć granice

749.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n}\sqrt{3n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{3n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}\sqrt{3n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}\sqrt{3n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3n}\sqrt{4n}}$

**Wskazówka:** Niewymierność  $\sqrt{(x+a)(x+b)}$  całkujemy wykonując podstawienie  $t = \sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$ .

750.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\sin(n^2+0^2)}{n^2+0^2} + \frac{n+\sin(n^2+1^2)}{n^2+1^2} + \frac{n+\sin(n^2+2^2)}{n^2+2^2} + \frac{n+\sin(n^2+3^2)}{n^2+3^2} + \dots$

$\dots + \frac{n+\sin(n^2+n^2)}{n^2+n^2}$  **Wskazówka:** Skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.