1. Pochodna funkcji. Twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a.

Ćwiczenia: 5-6.03.2007

Kolokwium nr 1: 6.03.2007 (zad. 442-495)

442. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Korzystając **z definicji** pochodnej obliczyć $f'(8)$.

443. Niech $f(x)=x^5$. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na $f'(x)$.

444. Chcemy zaokrąglić modułowi *dzióbek*. Niech n będzie liczbą naturalną. Dobrać takie a, b, c zależne od n, aby funkcja

$$f_n(x)=\begin{cases} |x| & \text{dla} \quad |x|\geqslant 1/n \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad |x|<1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Obliczyć f_n'. Naszkicować wykres funkcji f_n oraz wykres jej pochodnej.

445. Dla danych różnych liczb rzeczywistych a i b oraz zbioru $Z\subset\mathbb{R}$ chcemy formalnie zapisać warunek, ze istnieje w zbiorze Z liczba (ostro) między a i b, nie wiemy jednak z góry, która z liczb a, b jest większa. Które z podanych warunków są do tego celu odpowiednie?

(♣) $$\underset{c\in Z}{\exists}\; a<c<b$$

(♢) $$\underset{c\in Z}{\exists}\; a<c<b \;\wedge\; b<c<a$$

(♡) $\displaystyle\exists_{c\in Z}\ a<c<b \vee b<c<a$

(♠) $\displaystyle\exists_{c\in(0,1)}\ ac+b(1-c)\in Z$

(♣♣) $\displaystyle\exists_{c>0}\ ac+b(1-c)\in Z$

(♢♢) $\displaystyle\exists_{c\in[0,1]}\ bc+a(1-c)\in Z$

(♡♡) $\displaystyle\exists_{c\in(0,1)}\ a+(b-a)c\in Z$

(♠♠) $\displaystyle\exists_{c\in(0,1)}\ a+(a-b)c\in Z$

(♣♣♣) $\displaystyle\exists_{c\in Z}\ \frac{c}{b-a}\in(0,1)$

(♢♢♢) $\displaystyle\exists_{c\in Z}\ \frac{c-b}{b-a}\in(0,1)$

(♡♡♡) $\displaystyle\exists_{c\in Z}\ \frac{c-a}{b-a}\in(0,1)$

(♠♠♠) $\displaystyle\exists_{c\in Z\setminus\{a\}}\ \frac{b-a}{c-a}>1$

446. Przyporządkować następującym twierdzeniom podane niżej warunki oraz powiedzieć, co mówi warunek nieprzyporządkowany żadnemu twierdzeniu.

(i) **Własność Darboux funkcji ciągłych:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to

(ii) **Własność Darboux pochodnej funkcji:** Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $[a,b]$, przy czym w punktach a i b istnieją odpowiednie pochodne jednostronne, to

(iii) **Twierdzenie Rolle'a:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), a ponadto $f(a)=f(b)$, to

(iv) **Twierdzenie Lagrange'a (o wartości średniej rachunku różniczkowego):** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), to

$$(4\clubsuit) \qquad \mathop{\forall}_{s\in(0,1)} \mathop{\exists}_{t\in(0,1)} f'(a+t(b-a))=f'(a)+s(f'(b)-f'(a))$$

$$(5\diamondsuit) \qquad \mathop{\exists}_{t\in(0,1)} f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+t(b-a))$$

$$(6\heartsuit) \qquad \mathop{\forall}_{s\in(0,1)} \mathop{\exists}_{t\in(0,1)} f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

$$(7\diamondsuit) \qquad \mathop{\forall}_{t\in(0,1)} \mathop{\exists}_{s\in(0,1)} f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

$$(7\spadesuit) \qquad \mathop{\exists}_{t\in(0,1)} f'(a+t(b-a))=0$$

W następującym zadaniu wykorzystać twierdzenie Lagrange'a oraz własność Darboux funkcji ciągłych (przypomnienie: funkcja różniczkowalna jest ciągła).

447. Funkcje $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{12}$ są określone i różniczkowalne na całej prostej rzeczywistej, a ich pochodne są ciągłe. Ponadto

$f_1(3)=1,\ \ f_1(5)=2,$

$f_2(0)=3,\ \ f_2(4)=-1,$

$f_3(-5)=0,\ \ f_3(15)=10,$

$f_4(1)=2,\ \ \mathop{\forall}_{x} f_4'(x)\neq 1,$

$f_5(0)=0,\ \ f_5(2)=10,\ \ \underset{x}{\forall} f_5'(x)\neq 2,$

$f_6(0)=7,\ \ \underset{x}{\forall} f_6'(x)>2,$

$f_7(3)=5,\ \ \underset{x}{\forall} f_7'(x)\geqslant -1,$

$f_8(-2)=0,\ \ f_8(0)=10,\ \ f_8(3)=4,$

$f_9(-1)=0,\ \ f_9(1)=100,\ \ f_9'(3)=40,$

$f_{10}(1)=-5,\ \ f_{10}(11)=5,\ \ \underset{x}{\forall}\ 0<f_{10}'(x)<2,$

$f_{11}(0)=0,\ \ f_{11}(100)=0,\ \ \underset{x}{\forall}\ -1<f_{11}'(x)<2,$

$f_{12}(-100)=-100,\ \ f_{12}(100)=100,\ \ \underset{x}{\forall}\ -100<f_{12}'(x)<100.$

A) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{x}{\forall}\ f_i'(x)\neq 0$$

B) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=-1$$

C) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(0)\neq 1$$

D) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(99)>0$$

E) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=5$$

F) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=44$$

G) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c) = \frac{1}{2}$$

H) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(1) \neq 8$$

I) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i(c) = 13$$

J) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c\neq d}{\exists}\ f_i(c) = f_i(d) = 7$$

K) Dowieść, że dla co najmniej dziewięciu funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c,\,d}{\exists}\ f_i(c) = f_i'(d)$$

Zadania do samodzielnego rachowania

Obliczyć pochodną funkcji zmiennej x o podanym wzorze. Podać, w jakim zbiorze istnieje pochodna.

448. $3x^2 - 5x + 1$ **449.** $(\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)$ **450.** $\frac{1-x^3}{1+x^3}$

451. $(1+\sqrt{x})(1+x^{1/3})(1+x^{1/4})$ **452.** $(x^2+1)^4$ **453.** $\frac{x+1}{x-1}$

454. $\frac{x}{x^2+1}$ **455.** $(1+2x)^{30}$ **456.** $(\frac{1}{1+x^2})^{1/3}$

457. $\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$ **458.** 2^{x+3} **459.** $x10^x$

460. $\frac{x}{e^x}$ **461.** $x^2(x+1)e^x$ **462.** $e^x \ln x$

463. $\frac{\ln x}{e^x}$ **464.** e^{x^2} **465.** $x^{10}\ln x$

466. e^{e^x} **467.** $\ln\ln x$ **468.** $\log_{10}(x-1)$

469. 10^{2x-3} **470.** 2^{3^x} **471.** $\log_2|\log_3(\log_5 x)|$

472. $e^{\sqrt{\ln x}}$ **473.** x^{x^2} **474.** x^{x^x}

475. $x^{\sqrt{x}}$ **476.** $(\ln x)^x$ **477.** $e^{-x^2}\ln x$

478. $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ **479.** $x^5(x^6-8)^{1/3}$ **480.** $e^{2x+3}(x^2-x+\frac{1}{2})$

481. $\ln\frac{1}{1+x}$ **482.** $\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$ **483.** $|x|^3$

484. $\mathrm{sgn}(x)$ **485.** 0 dla $x<0$, x^2 dla $x\geqslant 0$

486. $e^{-|x|}$ **487.** $\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}$ **488.** $\{x\}$

489. x dla $x<0$, x^2 dla $x\geqslant 0$ **490.** $\mathrm{sgn}(x^5-x^3)$

491. $\frac{\pi^{10}}{x-e}$ **492.** e^x dla $x<0$, $1+x$ dla $x\geqslant 0$

493. x^7+e^2 **494.** $(x+e)^{20}$ **495.** e^e

2. Pochodna funkcji - zastosowania. Znajdowanie najmniejszej i największej wartości funkcji na przedziale domkniętym. Reguła de l'Hospitala.

Ćwiczenia: 12-13.03.2007

Kolokwium nr 2: 13.03.2007 (zad. 442-526)

496. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie trójkątnej i objętości 1. Który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej?

497. Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta u góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania potrzeba było jak najmniej materiału?

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

498. $x^2+2x+21$, $[-2,7]$ **499.** $|x^2-1|+3x$, $[-2,2]$

500. $|x+1|+x^2$, $[-10,10]$ **501.** $|10x-1|+x^3$, $[0,1]$

502. $\ln x-\frac{x}{10}$, $[1,e^3]$ **503.** $|\sin x|+\frac{x}{2}$, $[0,2\pi]$

504. $x^{1/x}$, $[2,4]$ **505.** $3\sin x+\sin 3x$, $[0,2\pi]$

Obliczyć granice

506. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$ **507.** $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$ **508.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

509. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-x^2-2}{x\sin x-x^2}$ **510.** $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{-x}$ **511.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$

512. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ **513.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{e^x}-e}{x}$ **514.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

515. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ **516.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}$ **517.** $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\ln x}{x-e}$

518. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}$ **519.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^x-4}{x-2}$

520. Niech $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$.

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

521. Niech $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x} & \text{dla} \quad x\notin\{k\pi; k\in\mathbb{Z}\} \\ A_k & \text{dla} \quad x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

Dla jakich A_k $(k\in\mathbb{Z})$ istnieją $f'(k\pi)$ i ile wynoszą?

522. Niech $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x-1}{\cos^2 x} & \text{dla} \quad x\notin\{k\pi+\frac{\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}\} \\ A_k & \text{dla} \quad x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

Dla jakich A_k $(k\in\mathbb{Z})$ istnieją $f'(k\pi+\frac{\pi}{2})$ i ile wynoszą?

523. Niech $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & \text{dla} \quad x\notin\mathbb{Z} \\ x^2-2x & \text{dla} \quad x\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x\in\mathbb{Z}$, dla których istnieje.

524. Niech $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{7x}-1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$.

Obliczyć $f'(0)$.

525. Niech $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)+1}{\sin(\pi x)} & \text{dla} \quad x\notin\mathbb{Z} \\ x^3-x & \text{dla} \quad x\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x\in\mathbb{Z}$, dla których istnieje.

526. Niech

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-3e^x+2}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}.$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?