Kolokwium nr 2.

Odbędzie się na ćwiczeniach w dniu 24.10.2006.
Zakres materiału: zad. 1-66.

3. Powtórka ze szkoły.

Konwersatorium 17.10.2006

33. Udowodnić, że dla dowolnych $a,b\in\mathbb{R}$ zachodzi nierówność trójkąta

$$|a+b|\leqslant|a|+|b| \ .$$

Wskazówka: Rozpatrzyć przypadki:
1° $a,b\geqslant 0$,
2° $a\geqslant 0,\ b<0$,
3° $a<0,\ b\geqslant 0$,
4° $a,b<0$,

Rozwiązać równania i nierówności

34. $|3x|+2\leqslant|x-6|$

35. $|x^2-25|\leqslant 24$

36. $|x|+|x+1|+|x+2|=x^2+2x+\frac{29}{9}$

37. $|x+10|=|2x+1|+3$

Naszkicować wykres funkcji f danej wzorem:

38. $f(x)=|x+1|+|2x+4|-|3x+9|$

39. $f(x)=|x-1|+|x+4|$

Czy jest prawdą, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność:

40. $x\leqslant|x|$

41. $-x\leqslant x$

42. $1\leqslant|1+x|+x$

43. $-1\leqslant|-1+x|+x$

44. $1\leqslant|1-x|+x$

45. $-1\leqslant|-1-x|+x$

46. $x \leqslant |x+1|+1$
47. $-x \leqslant |-x+1|+1$
48. $x \leqslant |x-1|+1$
49. $-x \leqslant |-x-1|+1$

4. Indukcja matematyczna.

Ćwiczenia 18.10.2006

50. Dowieść, że dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi równość
$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}\ .$$

51. Dowieść, że dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi równość
$$\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{n}{2}=\frac{n\cdot[(n-1)!]^2}{2^{n-1}}\ .$$

52. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+5\cdot 3^4+\ldots+n\cdot 3^{n-1}=\frac{2n-1}{4}\cdot 3^n+\frac{1}{4}\ .$$

53. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$(2^{2^0}+1)\cdot(2^{2^1}+1)\cdot(2^{2^2}+1)\cdot(2^{2^3}+1)\cdot(2^{2^4}+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1\ .$$
UWAGA: $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

54. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $10n<2^n+25$.

55. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2\ .$$

56. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+5\cdot 2^4+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=(n-1)\cdot 2^n+1\ .$$

57. Liczby a_n, b_n są określone wzorami $a_1=b_1=1$, $a_{n+1}=a_n+b_n$, $b_{n+1}=a_{n+1}+a_n$. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $2a_n^2-b_n^2$ jest równa ± 1.

58. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n} < 7^n$.

59. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{2n+3}{n} < \frac{3}{2} \cdot 4^n$.

Oszustwo **60.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110 \qquad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2+110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n+30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geqslant 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n \geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n=2$ mamy $60 < 4+110 = 114$,

dla $n=3$ mamy $90 < 8+110 = 118$,

dla $n=4$ mamy $120 < 16+110 = 126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n=6$ zachodzi nierówność $180 < 174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

61. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n} < 2^{2n+1}.$$

62. Dowieść, że dla każdego $n \geqslant 200$ sześcian można podzielić na n sześcianów.

63. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$ oraz że dla dowolnego $n \geqslant 6$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) prawdziwe jest $T(10)$,
b) prawdziwe jest $T(11)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \Rightarrow T(13)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \Rightarrow T(1)$,
e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \Rightarrow T(3)$.

64. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(100)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-1)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) prawdziwe jest $T(9)$,
b) prawdziwe jest $T(10)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(50) \Rightarrow T(30)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(300) \Rightarrow T(200)$,
e) prawdziwa jest implikacja $T(30) \Rightarrow T(50)$,
f) prawdziwa jest implikacja $T(200) \Rightarrow T(300)$.

65. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) prawdziwe jest $T(9)$,
b) prawdziwe jest $T(10)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(25)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(200)$.

66. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(6)$, oraz że dla dowolnego $n \geqslant 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) fałszywe jest $T(3)$,
b) fałszywe jest $T(11)$,
c) prawdziwe jest $T(9)$,
d) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$.