Powtórki i uzupełnienia III.

Konwersatorium 23.01.2007 (zad. testowe i przykłady z kolokwiów c.d.)

Ćwiczenia 23.01.2007 (wtorek 13-14) (zad. 425-427)

Ćwiczenia 24.01.2007 (środa 8-10) (zad. 428-432)

Ćwiczenia 26.01.2007 (**ŚRODA** 8-10) (zad. 433-441)

425. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3} \ldots\ldots C\cdot\frac{3^{3n}}{n}\,,$$

gdzie w miejscu kropek znajduje się znak $\geqslant$ lub $\leqslant$, a stała C jest najlepsza. Kierunek nierówności dobrać tak, aby można przeprowadzić dowód indukcyjny.

426. To samo dla nierówności postaci

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3} \ldots\ldots C\cdot\frac{3^{3n}}{n+1}\,.$$

427. Korzystając z dwóch poprzednich zadań otrzymać oszacowania postaci

$$C\cdot\frac{3^{3n}}{n} \leqslant \frac{(3n)!}{(n!)^3} \leqslant D\cdot\frac{3^{3n}}{n}\,.$$

Dla podanej funkcji f wyprowadzić oszacowanie postaci

$$|f(x)-f(x_0)| < C\cdot\delta$$

prawdziwe dla dowolnego $\delta>0$ oraz dowolnych $x, x_0\in D_f$ spełniających warunek $|x-x_0|<\delta$. W czterech zadaniach C jest liczbą rzeczywistą dodatnią, w jednym wyrażeniem zależnym od x_0.

428. $f(x)=\sqrt{x}$, $D_f=[1,+\infty)$

429. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

430. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

431. $f(x)=x^3$, $D_f=\mathbb{R}$

432. $f(x)=x^3$, $D_f=[-10,5]$

Obliczyć sumy szeregów potęgowych

433. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ **434.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ **435.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$

436. Podać przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla $x=1$.

437. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

438. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie 100 i wyrazach dodatnich, że $a_n=n$ dla $n\leqslant 10$.

439. Podać przykład takiego szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżnego do $-\infty$, że $a_n=n$ dla nieskończenie wielu n.

440. Podać przykład takiego szeregu rozbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, że granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ istnieje i jest mniejsza od 1.

441. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, że $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$ dla nieskończenie wielu n.