Kolokwium nr 1.

Odbędzie się na ćwiczeniach w dniu 17.10.2006.
Zakres materiału: jak w zadaniach z niniejszej listy.

1. Powtórka ze szkoły.

Poniższe zadania należy rozwiązać samodzielnie. Będą one omawiane na konwersatorium w dniu 10.10.2006

Obliczyć sumy (postępów arytmetycznych i geometrycznych):

1. $\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}+...+103$

2. $4+6+9+...+\frac{3^{100}}{2^{98}}$

3. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{100}}$

4. $7+9+11+13+...+(6n+1)$

5. $5+15+25+35+45+55+65+...+(100n+55)$.

6. $5+8+11+14+...+101$

7. $-17-13-9-...+99$

8. $27+81+243+...+3^{33}$

9. $1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4+...+2^n$

10. Obliczyć sumę $1\cdot 2+2\cdot 3+4\cdot 5+8\cdot 9+16\cdot 17+...+2^n\cdot(2^n+1)$.

11. Drugi, piąty i dziesiąty wyraz pewnego postępu arytmetycznego tworzą postęp geometryczny trójwyrazowy. Jaki jest iloraz tego postępu geometrycznego?

12. Obliczyć $1+2+4+7+8+10+13+14+16+19+...+1000$, gdzie różnice między kolejnymi składnikami tworzą ciąg okresowy 1,2,3,1,2,3,1,2,3,...

13. Obliczyć

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{2187},$$

gdzie w mianownikach znajdują się potęgi dwójki i trójki ustawione rosnąco.

OSZUSTWO **14.** Uprościć wyrażenie
$$\frac{1+3+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}.$$
Rozwiązanie:

W liczniku występuje suma postępu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1=1$ i ilorazie $q=3$. Ze wzoru $S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$ na sumę postępu geometrycznego otrzymujemy $S_n=\frac{3^n-1}{2}$, skąd
$$\frac{1+3+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}=\frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}<\frac{1}{2}\,.$$
Zauważmy, że
$$\frac{1+3+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}>\frac{3^n}{3^n}=1\,.$$
Zatem
$$1<\frac{1+3+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}<\frac{1}{2}\,.$$

2. Liczby całkowite, dwumian Newtona.

Zadania należy rozwiązać samodzielnie. Będą omawiane na ćwiczeniach w dniach 10-11.10.2006. Prowadzący ćwiczenia może kontrolować przygotowanie do zajęć.

15. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n}<4^n$.

Wskazówka: $(1+1)^{2n}$

16. Ile zer końcowych ma 1000! ?

Ile zer końcowych ma: **17.** 50!! **18.** 25!! ?

UWAGA: $n!!=\begin{cases} n(n-2)(n-4)(n-6)...2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ n(n-2)(n-4)(n-6)...1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}.$

19. Wskazać taką liczbę x, że dla dowolnych liczb naturalnych n i k prawdziwa jest równość
$$\binom{n}{k}+x\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=\binom{n+2}{k+2}\,.$$

20. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a,b,c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a}\ .$$

Oznaczenie: $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Obliczyć wartości wyrażeń:

21. $\sum\limits_{i=3}^{5} i^2$ **22.** $\sum\limits_{i=-99}^{100} i^3$ **23.** $\sum\limits_{i=-10}^{10} 7$

24. Obliczyć $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}$.

25. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p i liczby naturalnej $k<p$ liczba $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p.

26. Obliczyć $\sum\limits_{k=0}^{n} 16^k\binom{2n}{2k}$.

Oszustwo **27.** $\binom{2n}{n}=\frac{2n!}{n!\cdot n!}=\frac{2}{n!}$ po uproszczeniu przez $n!$. Jak to pogodzić z faktem, że liczba $\binom{2n}{n}$ jest całkowita?

28. Ile zer końcowych ma $\binom{125}{7}$?

29. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+3}{n+1}<7\cdot\binom{3n}{n}\ .$$

30. Wyznaczyć największą liczbę naturalną k taką, że liczba $30!$ jest podzielna przez 12^k.

31. Wyznaczyć największą liczbę naturalną k taką, że liczba $34!$ jest podzielna przez 12^k.

32. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba zer końcowych liczby $n!$ jest mniejsza niż $n/4$.