11	12	Σ

Nazwisko | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1

Imię | | | | | | | | | | | | | | | | | |

ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 6, zestaw A, 17.04.2007, godz. 9.15-10.00

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **11. (5 punktów)**

Znaleźć taką funkcję rózniczkowalną $F:\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}\to\mathbb{R}$, że

$$F'(x)=\frac{1}{x(x+2)}$$

oraz

$$F(-3)=F(-1)=F(1)=0$$

lub uzasadnić, że taka funkcja nie istnieje.

Zadanie **12.** **(7 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\,. \tag{1}$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział .... Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\text{..........................}=\text{...........................}\,.$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx=$$

$$=(c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{(b+c)\ln|1-x|}{3}+\frac{(b+c)\ln(x^2+x+1)}{6}-\frac{a\ln|1-x^3|}{3}+C$$

dla $a=$.........., $b=$.........., $c=$.......... otrzymujemy

$$f(x)=\int f'(x)dx=\text{...}\,. \tag{2}$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=$....... Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(\text{......})=\text{......}\,,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(\text{......})=\text{...}+C=$$

Nazwisko

Imię

ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski
KOLOKWIUM nr 6, zestaw A, 17.04.2007, godz. 9.15-10.00

$$= \text{...} + C\,.$$

Stąd

$$C = \text{...}$$

i ostatecznie

$$f(x) = \text{...}\,. \tag{3}$$

Przyjmując $x =$ ...... we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy .... Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(\text{......}) = \text{...} =$$

$$= \text{...} =$$

$$= \text{...}\,.$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

....

11	12	Σ

Nazwisko | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2

Imię | | | | | | | | | | | | | | | | | |

ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 6, zestaw B, 17.04.2007, godz. 9.15-10.00

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **11. (5 punktów)**

Znaleźć taką funkcję rózniczkowalną $F : \mathbb{R} \setminus \{0,2\} \to \mathbb{R}$, że

$$F'(x) = \frac{1}{x(x-2)}$$

oraz

$$F(-1) = F(1) = F(4) = 0$$

lub uzasadnić, że taka funkcja nie istnieje.

Zadanie **12.** **(7 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}\,. \tag{1}$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział .... Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\text{..........................}=\text{..........................}\,.$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx=$$

$$=(c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{(b+c)\ln|1-x|}{3}+\frac{(b+c)\ln\left(x^2+x+1\right)}{6}-\frac{a\ln|1-x^3|}{3}+C$$

dla $a=$.........., $b=$.........., $c=$.......... otrzymujemy

$$f(x)=\int f'(x)dx=\text{..}\,. \tag{2}$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=$....... Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(\text{......})=\text{......}\,,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(\text{......})=\text{..}+C=$$

Nazwisko | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Imię | | | | | | | | | | | | | | | | | |

ANALIZA A2 Wykład: J. Wróblewski

KOLOKWIUM nr 6, zestaw B, 17.04.2007, godz. 9.15-10.00

$$= \text{...} + C\,.$$

Stąd

$$C = \text{...}$$

i ostatecznie

$$f(x) = \text{...}\,. \qquad (3)$$

Przyjmując $x =$ ...... we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy .... Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(\text{......}) = \text{...} =$$

$$= \text{...} =$$

$$= \text{...}\,.$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

....