KOLOKWIUM nr 1, zestaw A, 17.10.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **1. (5 punktów)**

Znaleźć liczby naturalne n oraz k, dla których liczby $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$, $\binom{n}{k+2}$ tworzą (w podanej kolejności) rosnący postęp arytmetyczny trójwyrazowy, a przy tym $\binom{n}{k+2} = 3 \cdot \binom{n}{k}$. Podać wszystkie rozwiązania.

Zadanie **2. (5 punktów)**

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $(10n)!$ nie jest podzielna przez 11^n.

KOLOKWIUM nr 1, zestaw B, 17.10.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **1. (5 punktów)**

Znaleźć liczby naturalne n oraz k, dla których liczby $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$, $\binom{n}{k+2}$ tworzą (w podanej kolejności) rosnący postęp arytmetyczny trójwyrazowy, a przy tym $\binom{n}{k+2} = 2 \cdot \binom{n}{k}$. Podać wszystkie rozwiązania.

Zadanie **2. (5 punktów)**

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $(6n)!$ nie jest podzielna przez 7^n.

KOLOKWIUM nr 2, zestaw A, 24.10.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **3. (5 punktów)**

Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{17}+\frac{4}{4^4+1}+\frac{8}{4^8+1}+\frac{16}{4^{16}+1}+\ldots+\frac{2^n}{4^{2^n}+1}=\frac{1}{3}-\frac{2^{n+1}}{4^{2^{n+1}}-1}\,. \qquad (*)$$

Zadanie **4. (5 punktów)**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

4.1 Czy prawdziwa jest równość

a) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{2}-1$ ....

b) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=1-\sqrt{2}$ ....

c) $\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)^2}=3-\sqrt{8}$ ....

d) $\sqrt{\left(\sqrt{8}-3\right)^2}=\sqrt{8}-3$ ....

4.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+10)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(53)\Rightarrow T(93)$ ....

b) $T(52)\Rightarrow T(91)$ ....

c) $T(54)\Rightarrow T(92)$ ....

d) $T(51)\Rightarrow T(94)$ ....

4.3 Czy równość $\binom{n}{k+1}=2\cdot\binom{n}{k}$ jest prawdziwa dla

a) $n=20,\ k=6$ ....

b) $n=21,\ k=6$ ....

c) $n=22,\ k=7$ ....

d) $n=23,\ k=7$ ....

4.4 Czy liczba $\frac{(n+2)!}{n!}$ jest podzielna przez 12 dla

a) $n=41$ ....

b) $n=42$ ....

c) $n=43$ ....

d) $n=44$ ....

KOLOKWIUM nr 2, zestaw B, 24.10.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **3. (5 punktów)**

Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{7}+\frac{2}{37}+\frac{4}{6^4+1}+\frac{8}{6^8+1}+\frac{16}{6^{16}+1}+\ldots+\frac{2^n}{6^{2^n}+1}=\frac{1}{5}-\frac{2^{n+1}}{6^{2^{n+1}}-1}\,. \qquad (*)$$

Zadanie **4. (5 punktów)**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
Wyjątki:
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

4.1 Czy prawdziwa jest równość

a) $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=2-\sqrt{3}$ ....

b) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=\sqrt{3}-2$ ....

c) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=\sqrt{5}-2$ ....

d) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=2-\sqrt{5}$ ....

4.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+10)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(54)\Rightarrow T(94)$ ....

b) $T(52)\Rightarrow T(93)$ ....

c) $T(53)\Rightarrow T(91)$ ....

d) $T(51)\Rightarrow T(92)$ ....

4.3 Czy równość $\binom{n}{k+1}=2\cdot\binom{n}{k}$ jest prawdziwa dla

a) $n=17,\ k=5$ ....

b) $n=18,\ k=6$ ....

c) $n=19,\ k=7$ ....

d) $n=20,\ k=6$ ....

4.4 Czy liczba $\frac{(n+2)!}{n!}$ jest podzielna przez 12 dla

a) $n=30$ ....

b) $n=31$ ....

c) $n=32$ ....

d) $n=33$ ....

KOLOKWIUM nr 3, zestaw A, 31.10.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **5. (5 punktów)**

Wszystkie wyrazy siedmiowyrazowego potępu arytmetycznego są liczbami niewymiernymi. Dowieść, że suma tego postępu też jest liczbą niewymierną.

Zadanie **6. (5 punktów)**

Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $(3n)!$ nie jest podzielna przez 8^n.

KOLOKWIUM nr 3, zestaw B, 31.10.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **5. (5 punktów)**
Wszystkie wyrazy pięciowyrazowego potępu arytmetycznego są liczbami niewymiernymi. Dowieść, że suma tego postępu też jest liczbą niewymierną.

Zadanie **6. (5 punktów)**
Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $(4n)!$ nie jest podzielna przez 9^n.

KOLOKWIUM nr 4, zestaw A, 7.11.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **7. (5 punktów)**

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{4n^4-3n^3+2}{5n^4+4n^2-2} \leqslant D\,.$$

Zadanie **8.** **(5 punktów)**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
Wyjątki:
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

8.1 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $1000! < 10^{3000}$ ....

b) $1000! < 1000^{600}$ ....

c) $22^{444} < 444^{22}$ ....

d) $333^{333} < 3^{3333}$ ....

8.2 Czy jest prawdą, że

a) $\log_7 2 \cdot \log_7 3 = \log_7 5$ ....

b) $\log_7 2 + \log_7 3 = \log_7 6$ ....

c) $\log_7 2 < \log_7 3$ ....

d) $\log_5 2 < \log_7 2$ ....

8.3 Liczby a i b są **różnymi liczbami niewymiernymi dodatnimi**. Czy stąd wynika, że

a) liczba $a+b$ jest niewymierna ....

b) co najmniej jedna z liczb $a+b$ oraz $a-b$ jest liczbą niewymierną ....

c) liczba a/b jest niewymierna ....

d) co najmniej jedna z liczb ab oraz a/b jest liczbą niewymierną ....

8.4 Dane są liczby rzeczywiste x i y spełniające warunki $|x-4| < 1$ oraz $|y-4| < 2$. Czy stąd wynika, że

a) $|x-y| < 2$ ....

b) $|x+y| > 6$ ....

c) $|xy| > 10$ ....

d) $|xy| < 40$ ....

KOLOKWIUM nr 4, zestaw B, 7.11.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **7. (5 punktów)**

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{4n^4+3n^3-2}{5n^4-4n^2+2} \leqslant D\,.$$

Zadanie **8.** **(5 punktów)**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
Wyjątki:
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

8.1 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $1000! < 1000^{1000}$ ....

b) $1000! < 10^{1800}$ ....

c) $555^{33} < 33^{555}$ ....

d) $2^{4444} < 444^{444}$ ....

8.2 Czy jest prawdą, że

a) $\log_{11} 2 + \log_{11} 3 = \log_{11} 6$ ....

b) $\log_{11} 2 \cdot \log_{11} 3 = \log_{11} 5$ ....

c) $\log_5 2 < \log_5 3$ ....

d) $\log_5 3 < \log_7 3$ ....

8.3 Liczby a i b są **różnymi liczbami niewymiernymi dodatnimi**. Czy stąd wynika, że

a) liczba ab jest niewymierna ....

b) co najmniej jedna z liczb ab oraz a/b jest liczbą niewymierną ....

c) liczba $a-b$ jest niewymierna ....

d) co najmniej jedna z liczb $a+b$ oraz $a-b$ jest liczbą niewymierną ....

8.4 Dane są liczby rzeczywiste x i y spełniające warunki $|x-5| < 1$ oraz $|y-5| < 2$. Czy stąd wynika, że

a) $|x-y| < 2$ ....

b) $|x+y| > 6$ ....

c) $|xy| > 10$ ....

d) $|xy| < 40$ ....

KOLOKWIUM nr 5, zestaw A, 14.11.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **9. (5 punktów)**
Wskazać liczbę naturalną k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2\cdot\sqrt[6]{n^k+1}}{n^2+5\cdot\sqrt[3]{n^7+7}+7\cdot\sqrt{n^4+4}}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Zadanie **10. (5 punktów)**
Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n\cdot\binom{2n}{n}<\frac{5^n}{2}\,.$$

KOLOKWIUM nr 5, zestaw B, 14.11.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **9.** **(5 punktów)**
Wskazać liczbę naturalną k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2\cdot\sqrt[6]{n^k+1}}{n^2+5\cdot\sqrt[3]{n^7+7}+7\cdot\sqrt{n^5+5}}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Zadanie **10.** **(5 punktów)**
Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n\cdot\binom{2n-1}{n}<\frac{5^n}{4}\,.$$

KOLOKWIUM nr 6, zestaw A, 21.11.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **11. (5 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^4-n^2+1}{5n^5-n^3+1}+\frac{3n^4-2n^2+4}{5n^5-2n^3+8}+\frac{3n^4-3n^2+9}{5n^5-3n^3+27}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{3n^4-kn^2+k^2}{5n^5-kn^3+k^3}+\dots+\frac{3n^4-2n^3+4n^2}{5n^5-2n^4+8n^3}\right).$$

Zadanie **12.** **(5 punktów)**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
Wyjątki:
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

12.1 Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\binom{n}{2}}{n^3}=\frac{1}{3}$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\binom{n}{3}}{n^3}=\frac{1}{6}$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\binom{n}{2}}=2$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\binom{n}{3}}=0$ ....

12.2 Czy jest prawdą, że $\log_2(a+b)=\log_2 a+\log_2 b$, jeżeli

a) $a=2,\ b=2$ ....

b) $a=3/2,\ b=3$ ....

c) $a=2,\ b=3$ ....

d) $a=3/2,\ b=2$ ....

12.3 Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\underset{n\geqslant 100}{\forall}\ |a_n-7|<2\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) $\underset{n\geqslant 20}{\exists}\ |a_n-8|<1$ ....

b) $\underset{n\geqslant 200}{\forall}\ a_n>0$ ....

c) $\underset{n\leqslant 150}{\forall}\ a_n<10$ ....

d) $\underset{n\leqslant 20}{\exists}\ a_n>0$ ....

12.4 Czy z tego samego warunku, co w zadaniu powyżej, wynika, że

a) $\underset{n\leqslant 100}{\exists}\ \underset{m>n}{\forall}\ |a_n-a_m|<5$ ....

b) $\underset{n\geqslant 200}{\forall}\ \underset{m>n}{\forall}\ |a_n-a_m|<3$ ....

c) $\underset{n\geqslant 50}{\forall}\ \underset{m>n}{\forall}\ |a_n-a_m|<5$ ....

d) $\underset{n\geqslant 20}{\exists}\ \underset{m>n}{\exists}\ |a_n-a_m|<1$ ....

KOLOKWIUM nr 6, zestaw B, 21.11.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **11. (5 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^4+n^2-1}{5n^5+n^3-1}+\frac{3n^4+2n^2-4}{5n^5+2n^3-8}+\frac{3n^4+3n^2-9}{5n^5+3n^3-27}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{3n^4+kn^2-k^2}{5n^5+kn^3-k^3}+\ldots+\frac{3n^4+2n^3-4n^2}{5n^5+2n^4-8n^3}\right).$$

Zadanie **12.** **(5 punktów)**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

12.1 Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{\binom{n}{2}} = 2$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = 0$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{2}}{n^3} = \frac{1}{3}$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{3}}{n^3} = \frac{1}{6}$ ....

12.2 Czy jest prawdą, że $\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$, jeżeli

a) $a=2$, $b=3$ ....

b) $a=3/2$, $b=2$ ....

c) $a=2$, $b=2$ ....

d) $a=3/2$, $b=3$ ....

12.3 Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\underset{n\geqslant 100}{\forall} \ |a_n - 7| < 2\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) $\underset{n\geqslant 20}{\exists} \ |a_n - 8| < 1$ ....

b) $\underset{n\leqslant 20}{\exists} \ a_n > 0$ ....

c) $\underset{n\geqslant 200}{\forall} \ a_n > 0$ ....

d) $\underset{n\leqslant 150}{\forall} \ a_n < 10$ ....

12.4 Czy z tego samego warunku, co w zadaniu powyżej, wynika, że

a) $\underset{n\geqslant 50}{\forall} \ \underset{m>n}{\forall} \ |a_n - a_m| < 5$ ....

b) $\underset{n\geqslant 200}{\forall} \ \underset{m>n}{\forall} \ |a_n - a_m| < 3$ ....

c) $\underset{n\leqslant 100}{\exists} \ \underset{m>n}{\forall} \ |a_n - a_m| < 5$ ....

d) $\underset{n\geqslant 20}{\exists} \ \underset{m>n}{\exists} \ |a_n - a_m| < 1$ ....

KOLOKWIUM nr 7, zestaw A, 28.11.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **13. (5 punktów)**
Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+2}{\sqrt{n^{10}+2}}+\frac{5n^3+4}{\sqrt{n^{10}+4}}+\frac{5n^3+6}{\sqrt{n^{10}+6}}+\frac{5n^3+8}{\sqrt{n^{10}+8}}+\ldots+\frac{5n^3+6n^2}{\sqrt{n^{10}+6n^2}}\right).$$

Zadanie **14. (5 punktów)**
Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}}{6^n}.$$

KOLOKWIUM nr 7, zestaw B, 28.11.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **13.** **(5 punktów)**
Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+3}{\sqrt{n^{10}+3}}+\frac{5n^3+6}{\sqrt{n^{10}+6}}+\frac{5n^3+9}{\sqrt{n^{10}+9}}+\frac{5n^3+12}{\sqrt{n^{10}+12}}+\ldots+\frac{5n^3+6n^2}{\sqrt{n^{10}+6n^2}}\right).$$

Zadanie **14.** **(5 punktów)**
Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}}{7^n}.$$

KOLOKWIUM nr 8, zestaw A, 5.12.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **15. (3+3=6 punktów)** W każdym z dwóch podpunktów należy podać przykład i krótko uzasadnić jego poprawność.

a) Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n+1})$ są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=5 \qquad \text{oraz} \qquad a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n+1})=2\,.$$

b) Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^6$ są zbieżne, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^4$ jest rozbieżny.

Zadanie **16. (5 punktów)**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
Wyjątki: Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

16.1 Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+1}{4\sqrt{n^2+5}+3\sqrt[3]{n+17}} = \dfrac{5}{4}$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+1}{4\sqrt{n^5+5}+3\sqrt[3]{n^6+17}} = 0$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+1}{4\sqrt{n^3+5}+3\sqrt[3]{n^4+17}} = 0$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+1}{4\sqrt{n^4+5}+3\sqrt[3]{n^6+17}} = \dfrac{5}{7}$ ....

16.2 Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeżeli wiemy, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{6}{7}$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{3}$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{5}{3}$ ....

16.3 Czy jest prawdą, że

a) $2\cdot\log_3 5 = \log_3 10$ ....

b) $2\cdot\log_3 5 = \log_3 25$ ....

c) $2+\log_3 5 = \log_3 10$ ....

d) $2+\log_3 5 = \log_3 45$ ....

16.4 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2(-1)^n}{2n^2+1}$ ....

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2(-1)^n}{2n^3+1}$ ....

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^3+1}$ ....

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^4+1}$ ....

KOLOKWIUM nr 8, zestaw B, 5.12.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **15. (3+3=6 punktów)** W każdym z dwóch podpunktów należy podać przykład i krótko uzasadnić jego poprawność.

a) Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^8$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6$ jest rozbieżny.

b) Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}+a_{2n})$ i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n}+a_{2n+1})$ są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}+a_{2n}) = 5 \qquad \text{oraz} \qquad a_1+\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n}+a_{2n+1}) = 3\,.$$

Zadanie **16.** **(5 punktów)**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki: Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

16.1 Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+1}{4\sqrt{n^6+5}+3\sqrt[3]{n^9+17}}=\dfrac{5}{7}$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+1}{4\sqrt{n^2+5}+3\sqrt[3]{n^3+17}}=\dfrac{5}{3}$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+1}{4\sqrt{n^7+5}+3\sqrt[3]{n^8+17}}=0$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+1}{4\sqrt{n^5+5}+3\sqrt[3]{n^7+17}}=0$ ....

16.2 Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, jeżeli wiemy, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{3}{4}$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3}{2}$ ....

16.3 Czy jest prawdą, że

a) $2+\log_5 3=\log_5 6$ ....

b) $2+\log_5 3=\log_5 75$ ....

c) $2\cdot\log_5 3=\log_5 6$ ....

d) $2\cdot\log_5 3=\log_5 9$ ....

16.4 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n^3+1}$ ....

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2n^3+1}$ ....

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2(-1)^n}{2n^3+1}$ ....

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3(-1)^n}{2n^3+1}$ ....

KOLOKWIUM nr 9, zestaw A, 12.12.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **17.** **(7 punktów)** W każdym z dwóch podpunktów należy podać przykład i krótko uzasadnić jego poprawność.

a) (4 punkty) Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1})$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})$ są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})=6, \qquad a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1})=1$$

oraz

$$a_1+a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})=3\,.$$

b) (3 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, że $a_n=1/3^n$ dla nieskończenie wielu n, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3\,.$$

Zadanie **18. (5 punktów)**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
Wyjątki: Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

18.1 Czy jest prawdą, że

a) $\sqrt{(2-\log_3 7)^2} = 2-\log_3 7$ ....

b) $\sqrt{(2-\log_2 7)^2} = 2-\log_2 7$ ....

c) $\sqrt{(2-\log_5 23)^2} = 2-\log_5 23$ ....

d) $\sqrt{(2-\log_4 17)^2} = 2-\log_4 17$ ....

18.2 Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{7}{6}$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{6}{7}$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{3}$ ....

18.3 Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2+9}{x+3} = 0$ ....

b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6$ ....

c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ ....

d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x+3} = 0$ ....

18.4 Czy ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika, że

a) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny ....

b) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ jest zbieżny ....

c) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (5\cdot a_n)$ jest rozbieżny ....

d) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (5+a_n)$ jest rozbieżny ....

KOLOKWIUM nr 9, zestaw B, 12.12.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **17.** **(7 punktów)** W każdym z dwóch podpunktów należy podać przykład i krótko uzasadnić jego poprawność.

a) (3 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, że $a_n = 1/4^n$ dla nieskończenie wielu n, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4\,.$$

b) (4 punkty) Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1})$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2})$ są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}) = 6, \qquad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}) = 2$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2}) = 5\,.$$

Zadanie **18.** **(5 punktów)**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki: Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

18.1 Czy jest prawdą, że

a) $\sqrt{(2-\log_3 13)^2}=2-\log_3 13$ ....

b) $\sqrt{(2-\log_2 5)^2}=2-\log_2 5$ ....

c) $\sqrt{(2-\log_5 19)^2}=2-\log_5 19$ ....

d) $\sqrt{(2-\log_4 13)^2}=2-\log_4 13$ ....

18.2 Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{3}{4}$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{4}{3}$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2}$ ....

18.3 Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x+2}=0$ ....

b) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}=-4$ ....

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}=4$ ....

d) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+4}{x+2}=0$ ....

18.4 Czy ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika, że

a) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny ....

b) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ jest zbieżny ....

c) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3\cdot a_n)$ jest rozbieżny ....

d) szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3+a_n)$ jest rozbieżny ....

KOLOKWIUM nr 10, zestaw A, 19.12.2006, godz. 13.15-14.00

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **19. (7 punktów)**

a) (4 punkty) Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^7-2n+4)\cdot(-1)^n}{5n^9-3n^8+1000}.$$

b) (3 punkty) Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^8-2n+4}{5n^9-3n^8+1000}.$$

Zadanie **20. (6 punktów)**

W każdym z zadań **20.1-20.3** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

W zadaniu **20.4** udziel czterech odpowiedzi. Za trzy poprawne odpowiedzi otrzymasz 1 punkt. Za cztery poprawne odpowiedzi otrzymasz 2 punkty.

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **5 punktów**.

Za udzielenie 16 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **6 punktów**.

20.1 Czy jest prawdą, że

a) $\log_2 5 < \log_2 7$ ....

b) $\log_{1/2} 5 < \log_{1/2} 7$ ....

c) $\log_{1/2} 7 < \log_3 5$ ....

d) $\log_{1/3} 5 < \log_2 7$ ....

20.2 Czy liczba $\binom{n}{6}$ jest podzielna przez $\binom{n}{5}$, jeżeli

a) $n = 10$ ....

b) $n = 11$ ....

c) $n = 17$ ....

d) $n = 18$ ....

20.3 Czy funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \geqslant a \\ x+2 & \text{dla} \quad x < a \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

a) $a = -2$ ....

b) $a = -1$ ....

c) $a = 2$ ....

d) $a = 3$ ....

20.4 Podać sumę szeregu, jeżeli szereg jest zbieżny. Napisać słowo *rozbieżny*, jeżeli szereg jest rozbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ = ...

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n}$ = ...

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n}$ = ...

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$ = ...

KOLOKWIUM nr 10, zestaw B, 19.12.2006, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **19. (7 punktów)**

a) (3 punkty) Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^7-2n+4}{5n^8-4n^7+2000}\,.$$

b) (4 punkty) Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n^6-2n+4)\cdot(-1)^n}{5n^8-4n^7+2000}\,.$$

Zadanie **20.** **(6 punktów)**

W każdym z zadań **20.1-20.3** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

W zadaniu **20.4** udziel czterech odpowiedzi. Za trzy poprawne odpowiedzi otrzymasz 1 punkt. Za cztery poprawne odpowiedzi otrzymasz 2 punkty.

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **5 punktów**.

Za udzielenie 16 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **6 punktów**.

20.1 Czy jest prawdą, że

a) $\log_3 7 < \log_3 5$ ....

b) $\log_{1/3} 7 < \log_{1/3} 5$ ....

c) $\log_{1/2} 5 < \log_3 7$ ....

d) $\log_{1/3} 7 < \log_2 5$ ....

20.2 Czy liczba $\binom{n}{7}$ jest podzielna przez $\binom{n}{6}$, jeżeli

a) $n = 13$ ....

b) $n = 14$ ....

c) $n = 18$ ....

d) $n = 20$ ....

20.3 Czy funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \geqslant a \\ x+6 & \text{dla} \quad x < a \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

a) $a = -2$ ....

b) $a = -1$ ....

c) $a = 2$ ....

d) $a = 3$ ....

20.4 Podać sumę szeregu, jeżeli szereg jest zbieżny. Napisać słowo *rozbieżny*, jeżeli szereg jest rozbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} =$ ....

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-6)^n} =$ ....

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} =$ ....

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} =$ ....

KOLOKWIUM nr 11, zestaw A, 9.01.2007, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **21. (8 punktów)** W każdym z dwóch podpunktów należy podać przykład. Uzasadnienie poprawności przykładu nie jest wymagane.

a) (4 punkty) Podać przykład szeregu potęgowego, którego przedziałem zbieżności jest przedział $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$.

b) (4 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie równej 4, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

Zadanie **22.** **(7 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.3** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

W zadaniu **22.4** udziel ośmiu odpowiedzi. Za sześć poprawnych odpowiedzi otrzymasz 1 punkt. Za siedem poprawnych odpowiedzi otrzymasz 2 punkty. Za osiem poprawnych odpowiedzi otrzymasz 3 punkty.

Za udzielenie 20 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **7 punktów**.

22.1 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$ oraz dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(8) \Rightarrow T(20)$ ....

b) $T(21) \Rightarrow T(13)$ ....

c) $T(6) \Rightarrow T(17)$ ....

d) $T(20) \Rightarrow T(21)$ ....

22.2 Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa S. Czy stąd wynika, że zbieżny jest ciąg (a_n), jeżeli

a) $S=0$ ....

b) $S=1$ ....

c) $S=3/5$ ....

d) $S=5/3$ ....

22.3 Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\forall_n \left|a_n - \frac{3}{n}\right| < \frac{1}{n} .$$

Czy stąd wynika, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{n}$ ....

b) $\exists_n \ a_n < \frac{\sqrt{11}}{n}$ ....

c) $\exists_n \ a_n > 1$ ....

d) $\forall_n \ a_n < \frac{\sqrt{21}}{n}$ ....

22.4 Podać kresy zbiorów (zbiór A zdefiniowany w punkcie **a)** występuje w definicjach zbiorów X, Y, Z).

a) $A=\left\{\frac{n-3}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$......................... $\sup A=$.........................

b) $X=\{a^2 : a \in A\}$ $\inf X=$......................... $\sup X=$.........................

c) $Y=\{a+b : a,b \in A\}$ $\inf Y=$......................... $\sup Y=$.........................

d) $Z=\{a-b : a,b \in A\}$ $\inf Z=$......................... $\sup Z=$.........................

KOLOKWIUM nr 11, zestaw B, 9.01.2007, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **21. (8 punktów)** W każdym z dwóch podpunktów należy podać przykład. Uzasadnienie poprawności przykładu nie jest wymagane.

a) (4 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie równej 3, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

b) (4 punkty) Podać przykład szeregu potęgowego, którego przedziałem zbieżności jest przedział $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

Zadanie **22.** **(7 punktów)**

W każdym z zadań **22.1-22.3** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

W zadaniu **22.4** udziel ośmiu odpowiedzi. Za sześć poprawnych odpowiedzi otrzymasz 1 punkt. Za siedem poprawnych odpowiedzi otrzymasz 2 punkty. Za osiem poprawnych odpowiedzi otrzymasz 3 punkty.

Za udzielenie 20 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **7 punktów**.

22.1 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$ oraz dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+5)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(8) \Rightarrow T(23)$ ....

b) $T(21) \Rightarrow T(16)$ ....

c) $T(7) \Rightarrow T(11)$ ....

d) $T(20) \Rightarrow T(21)$ ....

22.2 Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa S. Czy stąd wynika, że zbieżny jest ciąg (a_n), jeżeli

a) $S=0$ ....

b) $S=1$ ....

c) $S=4/7$ ....

d) $S=7/4$ ....

22.3 Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\underset{n}{\forall} \left|a_n - \frac{4}{n}\right| < \frac{1}{n} .$$

Czy stąd wynika, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{n}$ ....

b) $\underset{n}{\exists} \quad a_n < \frac{\sqrt{21}}{n}$ ....

c) $\underset{n}{\exists} \quad a_n > 1$ ....

d) $\underset{n}{\forall} \quad a_n < \frac{\sqrt{31}}{n}$ ....

22.4 Podać kresy zbiorów (zbiór A zdefiniowany w punkcie **a)** występuje w definicjach zbiorów X, Y, Z).

a) $A = \left\{\frac{n-4}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$......................... $\sup A=$.........................

b) $X = \{a^2 : a \in A\}$ $\inf X=$......................... $\sup X=$.........................

c) $Y = \{a+b : a,b \in A\}$ $\inf Y=$......................... $\sup Y=$.........................

d) $Z = \{a-b : a,b \in A\}$ $\inf Z=$......................... $\sup Z=$.........................

KOLOKWIUM nr 12, zestaw A, 16.01.2007, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **23. (16 punktów)** W każdym z trzech podpunktów należy podać przykład. Uzasadnienie poprawności przykładu nie jest wymagane.

a) (3 punkty) Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zbieżnego na całej prostej rzeczywistej, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 5 \text{ dla } x=1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 20 \text{ dla } x=2\,.$$

b) (3 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych i sumie równej 1, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

c) (10 punktów) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$$

jest rozbieżny.

Zadanie **24.** **(9 punktów)**

W zadaniu **24.1** udziel dwunastu **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0,n-8)$ punktów.

W zadaniu **24.2** udziel ośmiu odpowiedzi. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0,n-4)$ punktów.

Za udzielenie wszystkich 20 poprawnych odpowiedzi w obu zadaniach otrzymasz **9 punktów**.

24.1 Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\underset{n}{\forall}\ |a_n-1|<\frac{1}{n}.$$

Czy stąd wynika, że

a) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-2|>\frac{1}{n}$ ....

ą) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-3|>\frac{1}{n}$ ....

b) $\underset{n}{\forall}\ a_n>0$ ....

c) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-1|<\frac{1}{n^2}$ ....

ć) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-1|<\frac{1}{\sqrt{n}}$ ....

d) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-1|<\frac{1}{2n}$ ....

e) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-1|<\frac{2}{n}$ ....

ę) $\underset{n}{\exists}\ |a_n-1|<\frac{1}{10}$ ....

f) $\underset{n}{\exists}\ |a_n-1|>\frac{1}{10}$ ....

g) $\underset{n}{\exists}\ a_n>1$ ....

h) $\underset{n}{\exists}\ a_n<\frac{7}{6}$ ....

i) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-a_{n+1}|<\sqrt{2}$ ....

24.2 Podać kresy zbiorów (zbiór A zdefiniowany w punkcie **a)** występuje w definicjach zbiorów X, Y, Z).

a) $A=\left\{\frac{2n-3}{n}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$......................... $\sup A=$.........................

b) $X=\{|a|:\ a\in A\}$ $\inf X=$......................... $\sup X=$.........................

c) $Y=\{ab:\ a,b\in A\}$ $\inf Y=$......................... $\sup Y=$.........................

d) $Z=\{2a-b:\ a,b\in A\}$ $\inf Z=$......................... $\sup Z=$.........................

KOLOKWIUM nr 12, zestaw B, 16.01.2007, godz. 13.15-14.00
PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **23.** **(16 punktów)** W każdym z trzech podpunktów należy podać przykład. Uzasadnienie poprawności przykładu nie jest wymagane.

a) (3 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych i sumie równej 1, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b) (3 punkty) Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zbieżnego na całej prostej rzeczywistej, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2 \text{ dla } x = 1 \quad \text{ oraz } \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 18 \text{ dla } x = 3\,.$$

c) (10 punktów) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$$

jest rozbieżny.

Zadanie **24.** **(9 punktów)**

W zadaniu **24.1** udziel dwunastu **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0,n-8)$ punktów.

W zadaniu **24.2** udziel ośmiu odpowiedzi. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0,n-4)$ punktów.

Za udzielenie wszystkich 20 poprawnych odpowiedzi w obu zadaniach otrzymasz **9 punktów**.

24.1 Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\underset{n}{\forall}\ |a_n-1|<\frac{1}{n}.$$

Czy stąd wynika, że

a) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-2|>\frac{1}{n}$ ....

ą) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-3|>\frac{1}{n}$ ....

b) $\underset{n}{\forall}\ a_n>0$ ....

c) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-1|<\frac{1}{n^2}$ ....

ć) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-1|<\frac{1}{\sqrt{n}}$ ....

d) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-1|<\frac{1}{3n}$ ....

e) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-1|<\frac{3}{n}$ ....

ę) $\underset{n}{\exists}\ |a_n-1|<\frac{1}{5}$ ....

f) $\underset{n}{\exists}\ |a_n-1|>\frac{1}{5}$ ....

g) $\underset{n}{\exists}\ a_n>1$ ....

h) $\underset{n}{\exists}\ a_n<\frac{4}{3}$ ....

i) $\underset{n}{\forall}\ |a_n-a_{n+1}|<\sqrt{2}$ ....

24.2 Podać kresy zbiorów (zbiór A zdefiniowany w punkcie **a)** występuje w definicjach zbiorów X, Y, Z).

a) $A=\left\{\frac{3n-5}{n}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$......................... $\sup A=$.........................

b) $X=\{|a|:\ a\in A\}$ $\inf X=$......................... $\sup X=$.........................

c) $Y=\{ab:\ a,b\in A\}$ $\inf Y=$......................... $\sup Y=$.........................

d) $Z=\{2a-b:\ a,b\in A\}$ $\inf Z=$......................... $\sup Z=$.........................