EGZAMIN, ANALIZA A1, 25.02.2007, 2 x 80 minut

8 zadań po 5 punktów, próg: 20=3.0

Zadanie **1.**

W każdym z poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt. Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

1.1 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe, a ponadto wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej $n \neq 7$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(7)$ jest prawdziwe ....

b) $T(8)$ jest prawdziwe ....

c) $T(8)$ jest fałszywe ....

d) $T(9)$ jest fałszywe ....

1.2 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej $n \neq 7$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, a ponadto wiadomo, że dla $n=7$ implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ jest fałszywa. Czy stąd wynika, że

a) $T(7)$ jest prawdziwe ....

b) $T(8)$ jest prawdziwe ....

c) $T(8)$ jest fałszywe ....

d) $T(9)$ jest fałszywe ....

1.3 Czy jest prawdą, że $a \cdot \log_7 b = b \cdot \log_7 a$, jezeli

a) $a=2$, $b=3$ ....

b) $a=2$, $b=4$ ....

c) $a=2$, $b=5$ ....

d) $a=3$, $b=4$ ....

1.4 Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ ....

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ ....

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ ....

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ....

Zadanie **2.**

W poniższym zadaniu udziel dziesięciu odpowiedzi. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n{-}5)$ punktów.
Przypomnienie: na analizie liczby 0 nie uważamy za liczbę naturalną.

Podać kresy zbiorów.

a) $A = \left\{ \frac{7m-5n}{mn} : m,n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf A=$......................... $\sup A=$.........................

b) $B = \left\{ \frac{(n!)^2}{37^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\inf B=$......................... $\sup B=$.........................

c) $C = \{(\log_x(4x)) - 2\log_x 2 : x \in (2,4) \cup (8,16)\}$

$\inf C=$......................... $\sup C=$.........................

d) $D = \{|\log_2 x| : x \in (1/8, 4)\}$ $\inf D=$......................... $\sup D=$.........................

e) $E = \{|\log_2 x| : x \in (1/4, 8)\}$ $\inf E=$......................... $\sup E=$.........................

Zadanie **3.**

W poniższym zadaniu udziel piętnastu **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-10)$ punktów.

Zmienne m,n przebiegają zbiór liczb naturalnych.

Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\forall_n \left|a_n - \frac{1}{n}\right| < n\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) ciąg (a_n) jest zbieżny ....

b) ciąg (a_n) jest rozbieżny ....

c) $\forall_n\ a_n > 0$ ....

d) $\forall_n\ a_n < 2007$ ....

e) $\exists_n\ a_n < 0$ ....

f) $\exists_n \left(|a_n - n| < \frac{1}{n}\right)$ ....

g) $\forall_n\ (|a_n - n| < 2n)$ ....

h) $a_1 > 0$ ....

i) $a_2 > 0$ ....

j) $a_2 \neq a_3$ ....

k) $|a_3| < \frac{10}{3}$ ....

l) $|a_3| > \frac{8}{3}$ ....

m) $|a_3| < \frac{1}{3}$ ....

n) $|a_{37} - a_{73}| > \frac{1}{111}$ ....

o) $|a_{37} - a_{73}| < 111$ ....

Zadanie **4.**

Uzasadnienie poprawności przykładów nie jest wymagane.

Za poprawne podanie obydwu przykładów otrzymasz 5 punktów.

a) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie równej 1/2, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba a_n jest całkowita.

b) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o promieniu zbieżności równym 2, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 4 \text{ dla } x = 1\,.$$

Zadanie **5.**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+1}{n^3+\sqrt{n^6+1}}+\frac{4n^2+2}{n^3+\sqrt{n^6+2}}+\frac{4n^2+3}{n^3+\sqrt{n^6+3}}+\frac{4n^2+4}{n^3+\sqrt{n^6+4}}+\ldots+\frac{4n^2+6n}{n^3+\sqrt{n^6+6n}}\right).$$

Zadanie **6.**

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^{1000}}{2^{n^2}}.$$

Zadanie **7.**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(3n+1)!<\left(3^n\cdot(n!)\right)^3.$$

Zadanie **8.**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}.$$