EGZAMIN, ANALIZA A1, 16.02.2007, 2 x 80 minut

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie **1.**

W każdym z poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt. Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

1.1 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że $T(24)$ jest fałszywe, $T(25)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+10)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(14)$ jest fałszywe ....

b) $T(34)$ jest fałszywe ....

c) $T(15)$ jest prawdziwe ....

d) $T(35)$ jest prawdziwe ....

1.2 Czy z tych samych założeń, co w poprzednim zadaniu wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(11)\Rightarrow T(34)$ ....

b) $T(13)\Rightarrow T(35)$ ....

c) $T(14)\Rightarrow T(36)$ ....

d) $T(17)\Rightarrow T(37)$ ....

1.3 Czy liczba $\binom{n}{11}$ jest podzielna przez $\binom{n}{10}$, jeżeli

a) $n=50$ ....

b) $n=54$ ....

c) $n=55$ ....

d) $n=59$ ....

1.4 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $100! < 10^{200}$ ....

b) $100! < 1000^{30}$ ....

c) $2^{1000} < 1000^{100}$ ....

d) $2^{1000000} < 1000000^{1000}$ ....

Zadanie **2.**

W poniższym zadaniu udziel dziesięciu odpowiedzi. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-5)$ punktów.
Przypomnienie: na analizie liczby 0 nie uważamy za liczbę naturalną.

Podać kresy zbiorów.

a) $A = \left\{\frac{10-3n}{3} : n \in \mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$......................... $\sup A=$.........................

b) $B = \left\{a^2 : a \in A\right\}$ $\inf B=$......................... $\sup B=$.........................

c) $C = \left\{\frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^n} : m,n \in \mathbb{N}\right\}$ $\inf C=$......................... $\sup C=$.........................

d) $D = \left\{\frac{1}{2^m} - 3^n : m,n \in \mathbb{N}\right\}$ $\inf D=$......................... $\sup D=$.........................

e) $E = \{\sin x : x \in (\pi/3, 5\pi/4)\}$ $\inf E=$......................... $\sup E=$.........................

Zadanie **3.**

W poniższym zadaniu udziel piętnastu **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0,n-10)$ punktów.

Zmienne m,n przebiegają zbiór liczb naturalnych.

Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\underset{n}{\forall}\ |a_n-(-1)^n|<\frac{1}{n}\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) ciąg (a_n) jest zbieżny ....

b) ciąg (a_n) jest rozbieżny ....

c) $\underset{n}{\forall}\ a_n>0$ ....

d) $\underset{n}{\forall}\ a_n<5/2$ ....

e) $\underset{n}{\exists}\ a_n<-1/2$ ....

f) $\underset{m}{\forall}\underset{n}{\forall}\ (|a_m-a_n|<3)$ ....

g) $\underset{m}{\forall}\underset{n}{\forall}\ (|a_m-a_n|<4)$ ....

h) $a_1<a_2$ ....

i) $a_2<a_3$ ....

j) $|a_2-a_3|>1$ ....

k) $|a_3-a_5|>\frac{1}{2}$ ....

l) $|a_4-a_6|<\frac{1}{2}$ ....

m) $|a_4+a_5|<\frac{1}{2}$ ....

n) $|a_{37}-a_{73}|<\frac{1}{10}$ ....

o) $|a_{37}-a_{73}|>10$ ....

Zadanie **4.**

Uzasadnienie poprawności przykładów nie jest wymagane.

Za poprawne podanie obydwu przykładów otrzymasz 5 punktów.

a) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\sqrt{n}$ jest **rozbieżny**.

b) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2007 \text{ dla } x=0\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2008 \text{ dla } x=1$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2010 \text{ dla } x=2\,.$$

Zadanie **5.**

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n^4+3n^2-4)\cdot(-1)^n}{5n^6+3n^3-4} \,.$$

Zadanie **6.**

W Dakistanie zamiast pochodnej funkcji używa się kieropochodnej definiowanej wzorem

$$f^{\heartsuit}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h^2} \,.$$

Niech $f(x)=2x^4-x$. Obliczyć $f^{\heartsuit}(x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których istnieje.

Zadanie **7.**

Rozwiązać nierówność

$$\log_{|(x-1)/2|} 20 \leqslant \log_{|(x-1)/2|} \left(x^2-9x+20\right) \,.$$

Zadanie **8.**

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-64)^n\cdot n\cdot x^{3n}}{\sqrt{n^2+1}} \,.$$