EGZAMIN, ANALIZA A1, 2.02.2007, 2 x 80 minut

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie **1.**

W każdym z poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt. Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

1.1 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(2n)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(3)\Rightarrow T(12)$ ....

b) $T(10)\Rightarrow T(5)$ ....

c) $T(32)\Rightarrow T(16)$ ....

d) $T(6)\Rightarrow T(8)$ ....

1.2 O formule zdaniowej $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe, $T(100)$ jest fałszywe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+2)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(101)$ jest prawdziwe ....

b) $T(300)$ jest prawdziwe ....

c) $T(50)$ jest fałszywe ....

d) $T(200)$ jest fałszywe ....

1.3 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n\sqrt{n}+7}$ ....

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+1}{n\sqrt{n}+7}$ ....

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n\sqrt[3]{n}+7}$ ....

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+1}{n\sqrt[3]{n}+7}$ ....

1.4 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ ....

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n}+1}$ ....

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ ....

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ ....

Zadanie **2.**

W poniższym zadaniu udziel dziesięciu odpowiedzi. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-5)$ punktów.
Przypomnienie: na analizie liczby 0 nie uważamy za liczbę naturalną.

Podać kresy zbiorów.

a) $A=\left\{\frac{n+5}{n+3} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf A=$......................... $\sup A=$.........................

b) $B=\left\{\frac{7^n}{n!} : n\in\mathbb{N}\right\}$ $\inf B=$......................... $\sup B=$.........................

c) $C=\left\{x^2 : x\in(-3,-2)\cup(1,2)\right\}$ $\inf C=$......................... $\sup C=$.........................

d) $D=\left\{2^{-x} : x\in(-1,2)\right\}$ $\inf D=$......................... $\sup D=$.........................

e) $E=\left\{2^{x^2} : x\in(-2,\sqrt{3})\right\}$ $\inf E=$......................... $\sup E=$.........................

Zadanie **3.**

W poniższym zadaniu udziel piętnastu **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0,n-10)$ punktów.

Zmienne m,n,N przebiegają zbiór liczb naturalnych.

Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\underset{n}{\forall}\ |a_n-n|<\frac{1}{n}\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) ciąg (a_n) jest zbieżny ....

b) ciąg (a_n) jest rozbieżny ....

c) $\underset{n}{\forall}\ a_n>0$ ....

d) $\underset{n}{\exists}\ a_n<37$ ....

e) $\underset{n}{\exists}\ a_n>37$ ....

f) $\underset{N}{\exists}\ \underset{m}{\forall}\ \underset{n}{\forall}\ (N<m<n\Rightarrow|a_m-a_n|<N)$ ....

g) $\underset{m}{\forall}\ \underset{n}{\forall}\ (m\neq n\Rightarrow a_m\neq a_n)$ ....

h) $a_1<a_2$ ....

i) $a_2\neq a_3$ ....

j) $|a_2-a_3|<1$ ....

k) $|a_3-a_4|>\frac{1}{2}$ ....

l) $|a_4-a_5|>\frac{1}{2}$ ....

m) $|a_5-a_6|<\frac{1}{2}$ ....

n) $|a_{37}-a_{73}|<\frac{1}{10}$ ....

o) $|a_{37}-a_{73}|>10$ ....

Zadanie **4.**

Uzasadnienie poprawności przykładów nie jest wymagane.

Za poprawne podanie obydwu przykładów otrzymasz 5 punktów.

a) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych i sumie równej 1/3, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n zachodzi równość $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

b) (2 punkty) Podać przykład takiego szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 3 \text{ dla } x = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 24 \text{ dla } x = 4\,.$$

Zadanie **5.**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \,.$$

Zadanie **6.**

Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast pochodnej funkcji używa się tam karopochodnej definiowanej wzorem

$$f^{\diamondsuit}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \,.$$

Wyprowadzić wzór na $f^{\diamondsuit}(x)$, jeżeli $f(x)=x^3$.

Zadanie **7.**

Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 14$ jest wymierna.

Zadanie **8.**

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^{n^2}}{n^{1000}} \,.$$