Kolokwium nr 6: 24.11.2005, zad. 1-162
Kolokwium nr 7: 1.12.2005, zad. 98-170
Kolokwium nr 8: 8.12.2005, zad. 1-179
Kolokwium nr 9: 15.12.2005, zad. 98-200
Kolokwium nr 10: 22.12.2005, zad. 1-206
Kolokwium nr 11: 5.01.2006, zad. 98-211
Kolokwium nr 12: 12.01.2006, zad. 1-221
Kolokwium nr 13: 19.01.2006, zad. 1-229
Zaliczenie: 55/3.0, 66/3.5, 77/4.0, 88/4.5, 99/5.0 z 11 kolokwiów.

5. Całki wielokrotne.

Obliczyć całki wielokrotne

131. $\int_0^6 \int_{-1}^0 ye^x dxdy$ **132.** $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 xy+zdxdydz$ **133.** $\int_2^4 \int_3^7 y\ln xdxdy$

134. $\int_0^{2\pi} \int_1^e (\sin y)x^{1/x}dxdy$ **135.** $\int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{x+y}dxdy$ **136.** $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x\sin^2(xy)dxdy$

Dokonać zmiany kolejności całkowania. Obliczyć obydwie całki i porównać wyniki

137. $\int_2^3 \int_0^{\sqrt{y}} x^3dxdy$ **138.** $\int_1^2 \int_1^y xydxdy$ **139.** $\int_{-1}^1 \int_{|y|-1}^{1-|y|} x+y^2dxdy$

140. $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} 6x+ydydx$ **141.** $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} y+2dydx$ **142.** $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} 3xdydx$

143. $\int_1^2 \int_{2-x}^{x^2} 1dydx$ **144.** $\int_{-1}^1 \int_0^{y^2} x^{3/2}dxdy$

Obliczyć całki

145. $\iint_K e^x d\omega$, K - wnętrze trapezu o wierzchołkach (0,0), (1,1), (2,1) i (3,0)

146. $\iint_L xyd\omega$, L - wnętrze trójkąta o wierzchołkach (0,0), (1,1) i $(2,-1)$

147. $\iint_M x^3d\omega$, $M=\{(x,y);4x^2+y^2\leqslant 4\}$

148. $\iiint_N x^2+yd\omega$, $N=\{(x,y,z);x,y,z\in\mathbb{R}_+\cup\{0\},x+y+z\leqslant 1\}$

149. $\iiint\limits_O 1d\omega$, $O=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$

150. $\iint\limits_P x^2d\omega$, P - wnętrze czworokąta krzywoliniowego o wierzchołkach (0,0), (2,4), (8,1) i $(-2,-2)$ ograniczonego parabolą $y=x^2$, hiperbolą $xy=8$ i dwoma odcinkami prostoliniowymi

151. $\iint\limits_Q \sqrt{y}d\omega$, Q - obszar ograniczony parabolą $y=x^2$ i prostą $y=x+6$

152. $\iint\limits_R |x^2-y|d\omega$, $R=[0,1]\times[0,1]$

Wyznaczyć środki ciężkości następujących figur

153. K **154.** L **155.** N **156.** O **157.** P **158.** Q

159. $S=\{(x,y);x^2+y^2\leqslant 1,x+y\leqslant 1\}$

160. Środek ciężkości wnętrza czworokąta o wierzchołkach $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ i $(0,a)$ leży w $(0,a)$. Czy środek ciężkości obwodu tego czworokąta znajduje się w jego wnętrzu? A środek ciężkości wierzchołków?

161. Obliczyć $\int\limits_0^1\int\limits_y^1 \frac{e^x-1}{x}dxdy$

162. Powszechnie wiadomo jak litrowym naczyniem w kształcie walca odmierzyć pół litra - wystarczy przechylić je tak, aby płyn zakrywał całe dno i jego poziom był styczny do obwodu dna. A ile płynu zostanie w naczyniu jeśli przechylimy je tak, aby płaszczyzna poziomu płynu przechodziła przez średnicę dna?

6. Zmiana zmiennych całkowania, współrzędne biegunowe, sferyczne, walcowe.

Wyrazić całki w podanych współrzędnych. Obliczyć w nowych współrzędnych.

163. $\displaystyle\int\limits_1^2\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx$ biegunowe

164. $\displaystyle\int\limits_0^2\int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{y^2}{x^2+y^2}dydx$ biegunowe

165. $\int\limits_0^3 \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} |x+y|dydx$ biegunowe

166. $\int\limits_{-1}^1 \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dzdydx$ sferyczne

167. Obliczyć objętość obszaru ograniczonego płaszczyzną $z=4$ i paraboloidą eliptyczną $x^2+4y^2=z$.

Wyrazić całki w podanych współrzędnych. Obliczyć w nowych współrzędnych.

168. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x\sqrt{3}} xydydx + \int\limits_1^2 \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$ biegunowe

169. $\int\limits_{-1}^1 \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} x^2+y^2+z^2 dzdydx$ sferyczne

170. $\int\limits_2^3 \int\limits_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} |x+y|dydx$ współrzędne (x,r), $r=\sqrt{x^2+y^2}$

7. Wzór Greena.

Oznaczenia:

K jest krzywą skierowaną przeciwzegarowo ograniczającą obszar Ω.

$X=(P,Q)$ jest polem wektorowym.

Wzór Greena (wersja rotacyjna):

$$\int\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\omega(x,y) = \int\limits_K Pdx + Qdy$$

WZÓR GREENA (wersja dywergencyjna):

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\omega(x,y) = \int_{K} -Qdx + Pdy$$

Dla podanego pola wektorowego oraz obszaru Ω na płaszczyźnie zastosować wzór Greena w podanej wersji (rot, div lub obydwie) i sprawdzić jego prawdziwość przez bezpośrednie obliczenie całek występujących po obu stronach wzoru

171. (x,y), $\Omega = \{(x,y); x^2 \leqslant y \leqslant 1\}$, (rot, div)

172. (y^2, x^3), $\Omega = [0,1]^2$, (div)

173. (e^{x-y}, e^{x-y}), $\Omega = \{(x,y); x,y \geqslant 0,\ x+2y \leqslant 2\}$, (div)

174. $(x,-y)$, $\Omega = \{(x,y); 1+y^2+x^2 \leqslant 2x+2y\}$, (rot, div)

175. $(xy,0)$, $\Omega = \{(x,y); x,y \in [0,1],\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$, (rot, div)

176. $(xe^{x^2+y^2}, ye^{x^2+y^2})$, $\Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \leqslant 1\}$, (rot, div)

177. $(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$, $\Omega = \{(x,y); 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$, (rot)

Wsk. Brzeg Ω składa się z 2 okręgów, zewnętrzny jest skierowany przeciwzegarowo, wewnętrzny zegarowo.

178. Zastosować wzór Greena do obliczenia całki
$\int_K x^{1998} e^{1999y} dx + x^{1999} e^{1999y} dy$,
gdzie $K = \{(x,y); x^2 + 5y^2 = 17\}$ jest skierowana preciwzegarowo.

179. Zastosować wzór Greena do obliczenia całki
$\int_K e^{(x+y)^7} dx + e^{(x+y)^7} dy$,
gdzie $K = \{(x,y); x^{1998} + y^{2000} = 1\}$ jest skierowana preciwzegarowo.

8. Pola wektorowe w przestrzeni. Potencjał.

Oznaczenia:
$X=(P,Q,R)$ jest polem wektorowym w przestrzeni.

$$\operatorname{rot} X = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Potencjałem pola wektorowego (na płaszczyźnie lub w przestrzeni) nazywamy funkcję, której to pole jest gradientem. O ile pole wektorowe jest określone w obszarze "bez dziur", potencjał istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy pole jest bezwirowe. Potencjał jest jedyny, z dokładnością do stałego składnika.

Rozstrzygnąć, czy dla dowolnej funkcji $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ i pola wektorowego $X:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ (różniczkowalnych w sposób ciągły tyle razy, ile trzeba) zachodzą poniższe równości (podać uzasadnienie równości lub kontrprzykład). 0 w zależności od kontekstu oznacza funkcję liczbową równą 0 lub zerowe pole wektorowe.

180. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f=0$ **181.** $\operatorname{div}\operatorname{rot} X=0$ **182.** $\operatorname{rot}\operatorname{rot} X=0$

183. $\operatorname{grad}\operatorname{div} X=0$ **184.** $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f=\operatorname{div}\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$

185. $\operatorname{rot}(fX)=\operatorname{grad} f\times X+f\operatorname{rot} X$ **186.** $\operatorname{div}\operatorname{grad} f=0$

187. $\operatorname{div}(fX)=\operatorname{grad} f\circ X+f\operatorname{div} X$

Znaleźć potencjały pól wektorowych (o ile posiadają potencjał)

188. (x,y) **189.** (y,x) **190.** (x^2,y^2) **191.** (y^2,x^2)

192. (xy^2,x^2y+y^3) **193.** (ye^x,e^x) **194.** $(e^x,\frac{1}{1+y^2})$

195. (x^2,y^3,z^4) **196.** $(2xy,x^2,y)$ **197.** (ye^{xy},xe^{xy},z^4)

198. $(\frac{y}{1+x^2+y^2},\frac{x}{1+x^2+y^2})$ **199.** $(x^9y^{20},2x^{10}y^{19})$

200. $((y+1)e^{z^2},xe^{z^2},2x(y+1)ze^{z^2})$

9. Całki powierzchniowe (niezorientowane).

201. Obliczyć $\int\!\!\int\limits_T |z| dS$, gdzie

$$T = \{(R\cos\alpha + r\cos\alpha\cos\beta, R\sin\alpha + r\sin\alpha\cos\beta, r\sin\beta); \alpha, \beta \in [0, 2\pi]\}$$

jest torusem o promieniach $r < R$.

202. Obliczyć $\int\!\!\int\limits_\Omega xy dS$, gdzie

$$\Omega = \{(x, y, x^2 + y^2); x, y \in [0,1]\}.$$

203. Obliczyć $\int\!\!\int\limits_\Omega z^5 dS$, gdzie

$$\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

204. Obliczyć $\int\!\!\int\limits_\Omega x^2 + y^2 dS$, gdzie

$$\Omega = \{(x, y, x^3 - 3xy^2); x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

jest fragmentem powierzchni zwanej *małpie siodło*.

205. Niech $0 < r \leqslant 2R$. Obliczyć pole powierzchni

$$P = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = R^2\ ,\ x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leqslant r^2\}.$$

Opisać własnymi słowami, co to za powierzchnia.

206. Czas staczania się figury obrotowej Ω z równi pochyłej jest proporcjonalny do $\sqrt{1 + \frac{I}{mR^2}}$, gdzie
$m = \int\limits_\Omega \rho d\omega$ jest masą,
ρ jest gęstością,
$R = \sup\limits_{(x,y,z)\in\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}$ jest zewnętrznym promieniem figury - przyjmujemy, że oś OZ jest osią obrotu,
$I = \int\limits_\Omega \rho(x^2 + y^2) d\omega$ jest momentem bezwładności względem osi obrotu.

Uporządkować następujące figury w/g czasu staczania się z równi:
a) sfera,
b) kula,
c) pełny walec,
d) powierzchnia boczna walca,

e) pusty walec (z podstawami), wysokość = promień podstawy,
f) walec wydrążony, promień wydrążenia = $\frac{1}{2}$ promienia walca,
g) dwa pełne stożki złączone wierzchołkami,
h) dwie powierzchnie boczne stożka złączone wierzchołkami,
i) dwa puste stożki (z podstawami) złączone wierzchołkami, wysokość = promień podstawy.

Uwaga: $\int\limits_{\Omega} \dots \, d\omega$ oznacza całkę podwójną (powierzchniową) lub potrójną.

10. Całki powierzchniowe (zorientowane).

Obliczyć całki powierzchniowe zorientowane (wybrać dowolnie orientację powierzchni)

207. $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, $S = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 = 2x\}$

208. $\iint\limits_S y^2dzdx + zdxdy$, $S = \{(x,y,z); x^2+y^2 = z^2,\ z \in [0,2]\}$

209. $\iint\limits_S zdydz + y^2dzdx + xdxdy$, $S = \{(x,y,x^2+y^2); x,y \in [-1,2]\}$

210. $\iint\limits_W (x+2)dydz + (y+3)dzdx$,
$W = \{(x,y,z); x^2+4x+y^2+6y = 0,\ z \in [2,5]\}$

211. $\iint\limits_S xdydz + e^{x+y+z}dzdx + dxdy$, S - równoległobok o wierzchołkach (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) i (1,-1,1)

11. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego.

Zastosować i sprawdzić prawdziwość twierdzenia Gaussa dla podanego pola wektorowego i obszaru Ω

212. (x,z,y), $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \leqslant 5\}$

213. $(1,xy,z)$, $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2 \leqslant 3z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$

214. $(x,0,y^2)$, $\Omega = \{(x,y,z); x,y \in [-1,1],\ 0 \leqslant z \leqslant (1-x^2)(1-y^2)\}$

215. $(x^2+y^2+z^2,0,0)$, $\Omega = [0,1]^3$

216. $(x,-y,0)$, $\Omega = \{(x,y,z); \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

217. $\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$, $\Omega=\{(x,y,z);1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$
218. (x,y,z), $\Omega=\{(x,y,z);x,y,z\geqslant 0,\ x+y+z\leqslant 3\}$
219. $(1,1,2x+2y)$, $\Omega=\{(x,y,z);x^2+y^2\leqslant z\leqslant 25\}$
220. (x,y,z), $\Omega=\{(x,y,z);\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\}$, $a,b,c>0$
221. (bc,ca,ab), $\Omega=\{(x,y,z);x,y,z\geqslant 0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\leqslant 1\}$, $a,b,c>0$. Jaki kąt tworzy pole wektorowe z największą ścianą? Jak się mają strumienie pola przez poszczególne ściany do kwadratów ich powierzchni?

12. Twierdzenie Stokes'a.

Zastosować i sprawdzić prawdziwość twierdzenia Stokes'a dla podanej całki krzywoliniowej i powierzchni

222. $\int\limits_{\partial S} x^2y+y^3dx-x^3-xy^2dy+e^{e^z}dz$, $S=\{(x,y,z);x^2+y^2=z\leqslant 4\}$
223. $\int\limits_{\partial S} ydx+2zdy+3xdz$, $S=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2=4\ ,\ z\geqslant 1\}$
224. $\int\limits_{\partial S} xyzdz$, $S=\{(x,y,z);x^2+y^2=z\leqslant x+2\}$
225. $\int\limits_{\partial S} xyzdz$, $S=\{(x,y,z);x^2+y^2\leqslant z=x+2\}$
226. $\int\limits_{\partial S} ydx+zdy-ydz$, $S=\{(x,y,z);x^2+y^2=z\leqslant 4\}$
227. $\int\limits_{\partial S} ydx+zdy-ydz$, $S=\{(x,y,z);x^2+y^2\leqslant z=4\}$
228. $\int\limits_{\partial S} ydx+zdy-ydz$, $S=\{(x,y,z);2\sqrt{x^2+y^2}=z\leqslant 4\}$
229. $\int\limits_{\partial S} ydx+zdy-ydz$,
$S=\{(x,y,z);x^2+y^2\leqslant 20,\ \sqrt{20-x^2-y^2}=z\geqslant 4\}$