EGZAMIN, ANALIZA 1A, 09.02.2005, ROZWIĄZANIA

Zadanie **1.**

Podać kresy następujących zbiorów. Przy każdym z kresów napisać, czy kres należy do zbioru (**TAK** = należy, **NIE** = nie należy).

$$A = \left\{ \frac{1}{i} + \frac{2}{j+1} + \frac{3}{k+2} : \ i,j,k \in \mathbb{N} \right\} \qquad \mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$$

$\inf A = 0$ **NIE** $\qquad$ $\sup A = 3$ **TAK**

$$B = \left\{ \frac{1}{3n-10} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf B = -1$ **TAK** $\qquad$ $\sup B = 1/2$ **TAK**

$$C = \left\{ e^{x^2} : \ x \in (-1,2] \right\}$$

$\inf C = 1$ **TAK** $\qquad$ $\sup C = e^4$ **TAK**

$$D = \left\{ e^{-x} : \ x \in (-1,+\infty) \right\}$$

$\inf D = 0$ **NIE** $\qquad$ $\sup D = e$ **NIE**

$$E = \left\{ \frac{n}{m} : \ m,n \in \mathbb{N} \wedge 2^m \leqslant 3^n \leqslant 5^m \right\}$$

$\inf E = \log_3 2$ **NIE** $\qquad$ $\sup E = \log_3 5$ **NIE**

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 09.02.2005, ROZWIĄZANIA

Zadanie **2.**

W każdym podpunkcie podaj przykład ciągu liczbowego o podanych własnościach. Nie musisz uzasadniać, że podany ciąg spełnia podane warunki. Pamiętaj jednak, aby opisać ciągi w sposób nie budzący wątpliwości, jakie są ich wyrazy. Możesz opisać ciągi wyłącznie symbolami matematycznymi lub posiłkować się słowami.

a)

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad n < a_n < n+1$$

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$

$$a_n = n + \frac{1}{2}$$

b)

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad |b_n - n| < \frac{1}{n}, \qquad\qquad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad b_n \notin \mathbb{Q}$$

$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych

$$b_n = n + \frac{1}{n\sqrt{2}}$$

c)

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad c_n \in (3,4), \qquad\qquad (c_n) \text{ jest rozbieżny}$$

$$c_n = 3{,}5 + 0{,}1(-1)^n$$

d)

$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{n>N}{\exists} \quad |d_n| < \frac{1}{n}, \qquad\qquad (d_n) \text{ jest rozbieżny}$$

$$d_n = 1 + (-1)^n$$

e)

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} \quad e_n > M, \qquad\qquad \underset{N\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} \quad e_n < N$$

$$e_n = n(-1)^n$$

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 09.02.2005, ROZWIĄZANIA

Zadanie **3.**

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n \cdot x^{3n}}{\sqrt{n}} .$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $A_n = \frac{(-8)^n \cdot x^{3n}}{\sqrt{n}}$.

Stosując kryterium d'Alemberta (można także zastosować kryterium Cauchy'ego) otrzymujemy
$$\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| = \frac{8^{n+1} \cdot |x|^{3n+3} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} \cdot 8^n \cdot |x|^{3n}} = \frac{8 \cdot |x|^3 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \to 8|x|^3 .$$

Jeżeli $8|x|^3 < 1$, czyli $|x| < 1/2$, to dany szereg potęgowy jest zbieżny.
Jeżeli $8|x|^3 > 1$, czyli $|x| > 1/2$, to dany szereg potęgowy jest rozbieżny.
Stąd otrzymujemy promień zbieżności szeregu potęgowego: $R = 1/2$.

Dla $x = 1/2$ otrzymujemy szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n \cdot (1/2)^{3n}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} ,$$
który jest zbieżny jako szereg naprzemienny.

Dla $x = -1/2$ otrzymujemy szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n \cdot (-1/2)^{3n}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} ,$$
który jest rozbieżny jako szereg potęgowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ z $p = 1/2 \leqslant 1$.

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest przedział $(-1/2, 1/2]$.

Sugerowana punktacja typowych rozwiązań:

Poprawne wyznaczenie promienia zbieżności: **2 punkty**.

Zapisanie szeregu dla $x = 1/2$ i napisanie, że jest zbieżny: **1 punkt**.

Zapisanie szeregu dla $x = -1/2$ i napisanie, że jest rozbieżny: **1 punkt**.

Uzasadnienie zbieżności szeregu dla $x = 1/2$, uzasadnienie rozbieżności szeregu dla $x = -1/2$, udzielenie odpowiedzi poprzez podanie przedziału zbieżności: **1 punkt** za 2 z trzech wymienionych elementów.

Zadanie **4.**

Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 1/2.

Rozwiązanie:

Z nierówności

$$\frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{3^n}$$

oraz ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

skąd wynika, że dany w zadaniu szereg jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 1/2.

Sugerowana punktacja typowych rozwiązań:

Dowód zbieżności szeregu (np. przez kryterium d'Alemberta): **2 punkty**.

Oszacowanie szeregu przez $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$: **2 punkty**.

Obliczenie sumy szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$: **1 punkt**.

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 09.02.2005, ROZWIĄZANIA

Zadanie **5.**

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 5$ zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n} < 2^{2n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n=5$ mamy $\binom{2n+4}{n}=\binom{14}{5}=2002$ oraz $2^{2n+1}=2^{11}=2048$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $2002<2048$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz $n \geqslant 5$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+4}{n} < 2^{2n+1}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+6}{n+1} < 2^{2n+3}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\binom{2n+6}{n+1} = \frac{(2n+6)!}{(n+1)!(n+5)!} = \frac{(2n+4)!(2n+5)(2n+6)}{n!(n+1)(n+4)!(n+5)} =$$

$$= \binom{2n+4}{n}\cdot\frac{(2n+5)(2n+6)}{(n+1)(n+5)} < 2^{2n+1}\cdot\frac{(2n+5)(2n+6)}{(n+1)(n+5)} \leqslant 2^{2n+1}\cdot 4 = 2^{2n+3}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+5)(2n+6)}{(n+1)(n+5)} \leqslant 4$$

dla $n \geqslant 5$. Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$(2n+5)(2n+6) \leqslant 4(n+1)(n+5)$$

$$4n^2+22n+30 \leqslant 4n^2+24n+20$$

$$10 \leqslant 2n\,,$$

czyli $n \geqslant 5$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność została udowodniona dla każdego $n \geqslant 5$.

Sugerowana punktacja typowych rozwiązań:

Dojście do wyrażenia $\binom{2n+4}{n}\cdot\frac{(2n+5)(2n+6)}{(n+1)(n+5)}$: **1 punkt**.

Oszacowanie $\binom{2n+6}{n+1}$ przez $2^{2n+1}\cdot\frac{(2n+5)(2n+6)}{(n+1)(n+5)}$: **1 punkt**.

Ułożenie i wykorzystanie nierówności $\frac{(2n+5)(2n+6)}{(n+1)(n+5)} \leqslant 4$: **2 punkty**.

Dowód nierówności $\frac{(2n+5)(2n+6)}{(n+1)(n+5)} \leqslant 4$: **1 punkt**.

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 09.02.2005, ROZWIĄZANIA

Zadanie **6.**

Wyznaczyć wartość parametru A, dla której funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-2xe^x-1}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej funkcji w punkcie otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{2h}-2he^h-1}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-2he^h-1-Ah^3}{h^4}\,. \qquad (*)$$

Ponieważ przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy zastosować regułę de l'Hospitala. Otrzymujemy wówczas

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{2e^{2h}-2he^h-2e^h-3Ah^2}{4h^3}\,. \qquad (*)$$

Ponieważ przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy ponownie zastosować regułę de l'Hospitala. Otrzymujemy wówczas

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{4e^{2h}-2he^h-4e^h-6Ah}{12h^2}\,.$$

Ponieważ przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala. Otrzymujemy wówczas

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{8e^{2h}-2he^h-6e^h-6A}{24h}\,. \qquad (*)$$

Ponieważ przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie $\frac{2-6A}{0}$, powyższa granica nie istnieje dla $A\neq 1/3$. Dla $A=1/3$ możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala $(*)$. Otrzymujemy wówczas

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{16e^{2h}-2he^h-8e^h}{24}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}\,. \qquad (*)$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w zerze dla $A=1/3$ i wtedy $f'(0)=1/3$.

Sugerowana punktacja typowych rozwiązań:

1 punkt za dojście do każdego miejsca oznaczonego $(*)$.

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 09.02.2005, ROZWIĄZANIA

Zadanie **7.**

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - |4x+4|$$

na przedziale $[-3,5]$. W których punktach te wartości są osiągane?

Rozwiązanie:

Obliczamy wartości funkcji w punktach -3 i 5 (końce przedziału) oraz w punkcie -1 (punkt, w którym funkcja f może być nieróżniczkowalna).

$$f(-3) = 1, \qquad f(-1) = 1, \qquad f(5) = 1\,.$$

Dla $x \in (-3,-1)$ funkcja f przyjmuje postać

$$f(x) = x^2 + 4x + 4\,,$$

skąd

$$f'(x) = 2x + 4\,.$$

Zatem $f'(x) = 0$ dla $x = -2$. Ponieważ $-2 \in (-3,-1)$ obliczamy wartość funkcji f w tym punkcie:

$$f(-2) = 0\,.$$

Dla $x \in (-1,5)$ funkcja f przyjmuje postać

$$f(x) = x^2 - 4x - 4\,,$$

skąd

$$f'(x) = 2x - 4\,.$$

Zatem $f'(x) = 0$ dla $x = 2$. Ponieważ $2 \in (-1,5)$ obliczamy wartość funkcji f w tym punkcie:

$$f(2) = -8\,.$$

Porównując wartości funkcji w wybranych pięciu punktach możemy udzielić odpowiedzi:

Funkcja f przyjmuje największa wartość równą 1 w trzech punktach: -3, -1, 5, a wartość najmniejszą równą -8 w punkcie 2.

Sugerowana punktacja typowych rozwiązań:

Pominięcie końców przedziału: **minus 2 punkty**.

Pominięcie punktu -1: **minus 2 punkty**.

Pominięcie przypadku $x \in (-3,-1)$: **minus 2 punkty**.

Pominięcie przypadku $x \in (-1,5)$: **minus 2 punkty**.

Brak odpowiedzi na pytanie postawione w zadaniu: **minus 1 punkt**.

Łączna ocena za zadanie nie może być niższa niż 0.

Zadanie **8.**

Rozwiązać nierówność

$$\log_{3\cdot 2^x}(x+8) \leqslant \log_{3\cdot 2^x}(x^3+8)\,.$$

Rozwiązanie:

Najpierw wyznaczamy dziedzinę nierówności:

Podstawy logarytmów są dodatnie, muszą też być różne od 1:

$$3\cdot 2^x \neq 1, \qquad \text{czyli} \qquad x \neq -\log_2 3\,.$$

Ponadto liczby logarytmowane muszą być dodatnie:

$$x+8>0, \qquad x^3+8>0\,,$$

czyli

$$x>-8, \qquad x>-2\,.$$

Ponieważ

$$1<\log_2 3<2$$

dziedziną nierówności jest zbiór

$$D=(-2,-\log_2 3)\cup(-\log_2 3,+\infty)\,.$$

Rozważamy dwa przypadki:

1° Gdy podstawy logarytmów są większe od 1, czyli gdy $x \in (-\log_2 3,+\infty)$, otrzymamy nierówność równoważną opuszczając logarytmy:

$$x+8 \leqslant x^3+8$$
$$x \leqslant x^3\,.$$

Zbiorem rozwiązań powyższej nierówności jest zbiór

(1) $$[-1,0]\cup[1,+\infty)\,,$$

który jest całkowicie zawarty w rozważanym przedziale $(-\log_2 3,+\infty)$. Zatem wszystkie liczby ze zbioru (1) są rozwiązaniami danej w treści zadania nierówności.

2° Gdy podstawy logarytmów są mniejsze od 1, czyli gdy $x \in (-2,-\log_2 3)$, otrzymamy nierówność równoważną opuszczając logarytmy i zmieniając kierunek nierówności:

$$x+8 \geqslant x^3+8$$
$$x \geqslant x^3\,.$$

Zbiorem rozwiązań powyższej nierówności jest zbiór

$$(-\infty,-1]\cup[0,1]\,,$$

co po uwzględnieniu rozważanego przedziału $(-2,-\log_2 3)$ daje następujący przyczynek do zbioru rozwiązań

(2) $$(-2,-\log_2 3)\,.$$

Sumując zbiory (1) i (2) otrzymujemy zbiór rozwiązań.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej w zadaniu nierówności jest zbiór

$$(-2,-\log_2 3)\cup[-1,0]\cup[1,+\infty)\,.$$

Zadanie **8. (c.d.)**

Sugerowana punktacja typowych rozwiązań:

Jeżeli autor rozwiązania nie wykazuje świadomości, że opuszczając logarytmy w zależności od podstawy zmieniamy kierunek nierówności, **0 punktów** za całe zadanie.

W pozostałych rozwiązaniach po **jednym punkcie** za każdy z następujących elementów:

- wyznaczenie dziedziny
- podział rozwiązania na przypadki 1° i 2°
- rozwiązanie przypadku 1°
- rozwiązanie przypadku 2°
- podanie ostatecznej odpowiedzi