8. Liczby zespolone.

Ćwiczenia: 28.04.2005
Kolokwium nr 10: 5.05.2005 (czwartek) - obowiązuje materiał od początku semestru

894. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

jeśli $b\neq 0$.

Rozwiązać równania, nierówności i układy równań.

895. $\overline{z}=z^2$ **896.** $\overline{z}=z^{-1}$ **897.** $1+i=z^2$ **898.** $3+4i=z^2$

899. $-3+4i=z^2$ **900.** $z^2+z=i$ **901.** $z^2+iz=1$

902. $z^2-(3+5i)z+(-4+7i)=0$ **903.** $z=\overline{z}+1$ **904.** $z^2\overline{z}=8i$

905. $z^4+10z^2+61=0$ **906.** $\begin{cases} z_1^2=z_2 \\ z_2^2=z_1 \end{cases}$ **907.** $\begin{cases} z_1^2+z_2^2=1 \\ z_1+z_2=-1 \end{cases}$

908. $\begin{cases} z_1+iz_2=1 \\ z_2+iz_1=2 \end{cases}$ **909.** $\begin{cases} z_1+\overline{z_2}=1 \\ \overline{z_1}+z_2=i \end{cases}$

910. $z^5=1$ (**Wsk.** $z^4+z^3+z^2+z+1=(z^2+az\pm 1)(z^2+bz\pm 1)$)

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

911. $\mathrm{Re}z+\mathrm{Re}z^2\geqslant 0$ **912.** $3|z|\leqslant|z^2|+1$ **913.** $|z|=|\overline{z}+1|$

914. $|z+i|\leqslant|z-i|$ **915.** $\mathrm{Im}\frac{z}{z^2+1}=0$ **916.** $\mathrm{Re}\frac{z+1}{z}=0$

Wyrazić przy pomocy $\sin x$ i $\cos x$:

917. $\sin 8x$ **918.** $\cos 4x$

Zapisać jako kombinację liniową wyrażeń postaci $\sin nx$ i $\cos nx$:

919. $\sin^5 x$ **920.** $\cos^4 x$ **921.** $\sin x\cos^2 x$ **922.** $\sin 7x\cos 8x\sin 9x$

Uprościć wyrażenia tak, aby zawierały tylko jeden arctg

923. $\mathrm{arctg}5+\mathrm{arctg}8$ **924.** $\mathrm{arctg}3+\mathrm{arctg}7$ **925.** $\mathrm{arctg}4-\mathrm{arctg}2$

Znaleźć wzory wyrażające następujące sumy:

926. $\sum_{n=1}^{N}\sin nx$ **927.** $\sum_{n=1}^{N}\cos 5nx$

928. $\sum\limits_{n=1}^{N}\cos nx\sin^{2}nx$ **929.** $\sum\limits_{n=1}^{N}\sin^{3}nx$

Wskazówka: Zastosować wzór

$$\sin nx=\mathrm{Im}(\cos nx+i\sin nx)=\mathrm{Im}\left((\cos x+i\sin x)^{n}\right),$$

a następnie skorzystać ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego.

930. W trójkącie prostokątnym PQD kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ=1$ i $PD=4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD, punkt A jest środkiem odcinka PC, punkt B jest środkiem odcinka AC. Punkt E leży na prostej PD, przy czym

$$\sphericalangle PQA+\sphericalangle PQB+\sphericalangle PQC=\sphericalangle PQD+\sphericalangle PQE.$$

Obliczyć PE.

9. Szeregi o wyrazach zespolonych.

Ćwiczenia: 5.05.2005

Kolokwium nr 11: 19.05.2005 (czwartek) - obowiązuje materiał od początku semestru

Kryteria zbieżności

Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli (z_n) nie dąży do 0, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|<\infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|<1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|>1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$.

Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}<1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}>1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$.

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z, że $|z|=1$ oraz $z\neq 1$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z|<1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}(z_n \pm y_n)=\sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n\,.$$

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c\neq 0$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cz_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c\sum_{n=1}^{\infty} z_n\,.$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} z_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} z_n \,.$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0,+\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R=0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R=+\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

Zbadać zbieżność szeregów:

931. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+in+1}$ **932.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+i}$ **933.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+i}$

934. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i}$ **935.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2+i}$ **936.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ni^n+1}{n^2+i}$

Znaleźć wzory wyrażające następujące sumy:

937. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ **938.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$

Znaleźć obszar zbieżności szeregów potęgowych:

939. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ **940.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2}$ **941.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$

942. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$ **943.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(i+2)^n z^n}{n}$ **944.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{3n}}{n}$

945. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(i+2)^{4n+3} z^{2n}}{n}$ **946.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+11i)^{n+8} z^{3n}}{\sqrt{n^2+n}-n}$ **947.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(i+1)^{3n} z^{2n}}{\sqrt{n}}$

948. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{4n+3} z^n}{n^2(i+2)^n}$ **949.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+i) z^n}{n^2}$ **950.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n+i}$