1. Całka nieoznaczona - podstawy. Całkowanie przez części i przez podstawienie.

Obliczyć $\int f(x)dx$ jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

592. 10^x **593.** $\sqrt[m]{x^n}$ $(m,n\in\mathbb{N})$ **594.** $a^x e^x$, $a>0$

595. $3{,}4x^{-0{,}17}$ **596.** $1-2x$

597. $(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$ **598.** $\dfrac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}$ **599.** $\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$

600. $(x+1)^{22}$ **601.** $\dfrac{x^{100}-1}{x-1}$ **602.** $\sin^2 x$ **603.** $\dfrac{x^3}{x+1}$

604. $\dfrac{x\sqrt[6]{x}+\sqrt[7]{x}}{x^2}$

Znaleźć takie F, że $F''(x)$ dane jest wzorem

605. x^2+2x **606.** $\cos x$ **607.** e^{7x}

Znaleźć takie F, że

608. $F''(x)=x^2+1$, $F'(0)=2$, $F(0)=3$

609. $F''(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $F'(2)=1$, $F(3)=5$

610. $F'''(x)=\sin x$, $F''(0)=F'(0)=F(0)=0$

611. $F''(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $F'(1)=F'(-1)=1$, $F(1)=F(-1)=3$

Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

612. $x\sin 2x$ **613.** xe^{-x} **614.** $x3^x$ **615.** $x^n\ln x$

616. x^3e^{5x} **617.** $e^x\sin^2 x$ **618.** $x\sin x\cos x$ **619.** $e^{3x}\sin 2x$

620. $\sqrt{e^x-1}$ **621.** $e^x\sin e^x$ **622.** xe^{x^2}

623. $1\cdot\sin\ln x$ **624.** $e^{-x^2}x$ **625.** $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

626. $e^{\sqrt[3]{x}}$ **627.** $\dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$ **628.** $\cos x\cdot e^{\sin x}$ **629.** 6^{1-x}

630. $\sin^5 x\cos x$ **631.** $\mathrm{tg}x$ **632.** $xe^{x^2}(x^2+1)$ **633.** $e^{5x}\sin 3x$

634. $e^{5x}\cos 3x$ **635.** $\sin 3x\cdot\sin 5x$

636. $\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x^2+1}$ **637.** $\dfrac{\mathrm{arctg}^7x+9\mathrm{arctg}^5x}{x^2+1}$ **638.** $\dfrac{x^3}{(x-1)^{12}}$

639. $\dfrac{\ln^7x+\ln^2x}{x}$ **640.** $e^{-x^2}x^5$ **641.** $\sin\sqrt{x}$ **642.** $\sin 15x\cdot e^{-4x}$

643. $\dfrac{\sqrt{2+\ln x}}{x}$ **644.** $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ **645.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **Wsk.** $x=\sin t$

Znaleźć takie F, że $F''(x)$ dane jest wzorem

646. xe^x **647.** $\dfrac{1}{x}$

2. Całka nieoznaczona. Całkowanie funkcji wymiernych.

Obliczyć $\displaystyle\int f(x)dx$, jeśli $f(x)$ dana jest wzorem:

648. $\dfrac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}$ **649.** $\mathrm{arctg}x$ **650.** $\mathrm{arctg}\sqrt{x}$ **651.** $\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

652. $\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)}$ **653.** $\dfrac{x}{x^2-7x+10}$ **654.** $\dfrac{x-2}{x^2-7x+12}$

655. $\dfrac{x}{2x^2-3x-2}$ **656.** $\dfrac{4x+3}{(x-2)^3}$ **657.** $\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$

658. $\dfrac{x^4}{x^2+1}$ **659.** $\dfrac{1}{(x^2+9)^3}$ **660.** $\dfrac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}$ **661.** $x^2\ln(x+1)$

662. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ **663.** $\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$ **664.** $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

665. $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ **Wsk.** $t=e^x$ **666.** $1\cdot\ln(1+x^2)$ **667.** $\dfrac{x^2}{1+x^3}$

668. $x\ln(x^2+1)$ **669.** $\dfrac{1}{x^2-x-1}$ **670.** $\dfrac{7x^6+3x^2+4x}{x^7+x^3+2x^2+4}$

671. $\sqrt{x}\ln x$ **672.** $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$ **673.** $\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ **674.** $\dfrac{e^x}{e^{3x}-1}$

675. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ **676.** $\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$ **677.** $\dfrac{1}{x^6+x^4}$

678. $\dfrac{1}{(x^2+2x+2)(x^2-4)}$ **679.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x+2}}}$ **680.** $\dfrac{x^4}{x^{15}-1}$

681. $\dfrac{1}{x^4+1}$ **Wsk.** $x^4+1=(x^2+ax\pm1)(x^2+bx\pm1)$

682. $x^2\operatorname{arctg}x$ **683.** $\dfrac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$

Sprowadzić następujące całki do całek funkcji wymiernych

684. $\int\sin^{10}x\,dx$ **685.** $\int\dfrac{dx}{\sin x+\cos x}$ **686.** $\int\dfrac{x^{20}}{x^{30}+\sqrt{x+1}}dx$

687. $\int\dfrac{\sqrt[5]{x+32}+11}{\sqrt[7]{x+32}+x}dx$ **688.** $\int\sqrt[7]{21+\sqrt[3]{x+5}}\,dx$

689. $\int\dfrac{\sqrt{x+7}+x}{x^2\sqrt{x+7}+4}dx$

690. $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ **Wsk.** $\sqrt{x^2+1}=x+t$

691. $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$ **Wsk.** $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=t$

692. $\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{x^2+9}}$ **693.** $\int\sqrt{x^2-16}\,x^7dx$

Wyrazić I_n przy pomocy I_{n-1} lub I_{n-2}

694. $I_n(x)=\int\dfrac{1}{(x^2+4)^n}dx$ **695.** $I_n(x)=\int x^ne^xdx$

696. $I_n(x)=\int x^n\sin x\,dx$

697. $I_n(x)=\int\sin^n x\,dx$ **Wsk.** $\sin x\cdot\sin^{n-1}x$ przez części

698. $I_n(x)=\int \ln^n x\,dx$ **699.** $I_n(x)=\int x^n e^{x^2}\,dx$

700. Znaleźć takie F, że $F''(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2}$, $F'(0)=0$, $F(0)=5$

Do poczytania:
K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy,* funkcje jednej zmiennej, Biblioteka Matematyczna 22, §**9 Całki nieoznaczone.**
W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach,* część I, Rozdział XV **Całki nieoznaczone,** Rozdział XVI **Całki funkcji wymiernych,** §17.1 **Całki z pierwiastków z wyrażenia liniowego.**

3. Całka oznaczona - podstawy.

701. Docent Karol Juzek ma wygłosić odczyt dotyczący całki oznaczonej. Docent Karol Juzek chce podać następujące wzory zachodzące dla funkcji ciągłej f na przedziale $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\inf_{x\in\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n},a+k\frac{b-a}{n}\right]} f(x) \qquad (A)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n},a+k\frac{b-a}{n}\right]} f(x) \qquad (B)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \qquad (C)$$

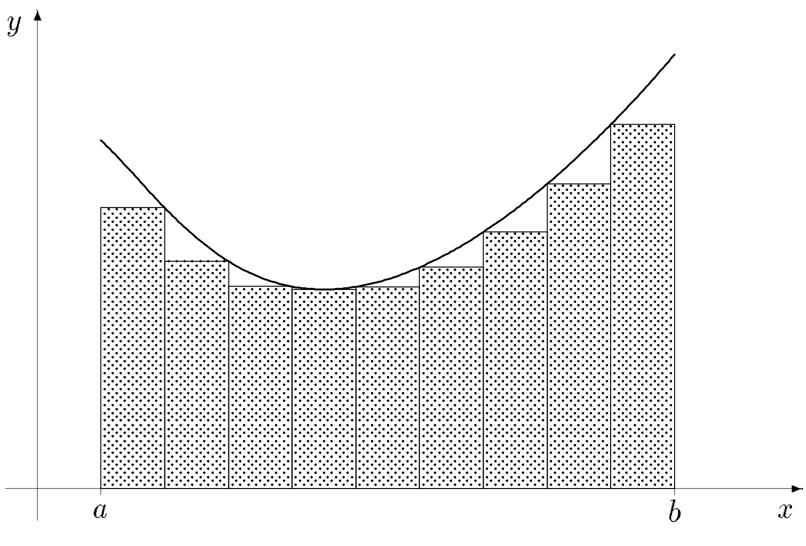
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \qquad (D)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (k-1/2)\frac{b-a}{n}\right) \tag{E}$$

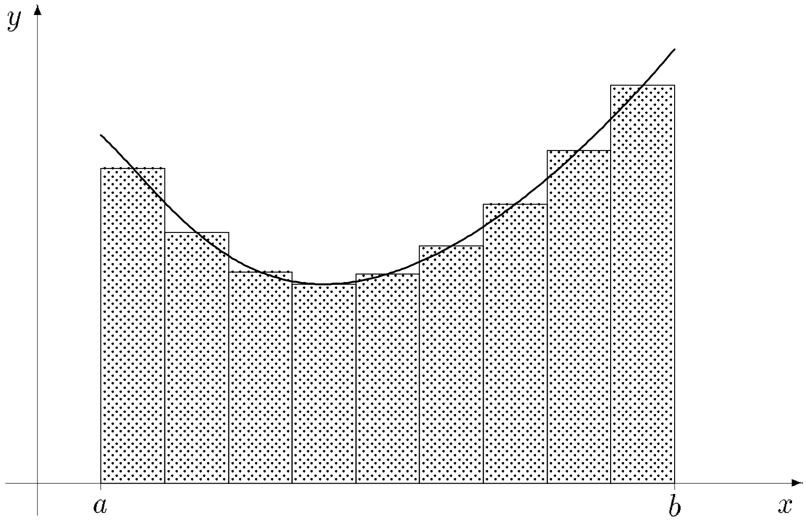
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \tag{F}$$

Docent Karol Juzek zlecił swojemu nowemu asystentowi wykonanie rysunków ilustrujących powyższe wzory. Niestety, asystent nieświadom ograniczonego potencjału intelektualnego Docenta Karola Juzka, nie napisał, który rysunek odpowiada któremu wzorowi.

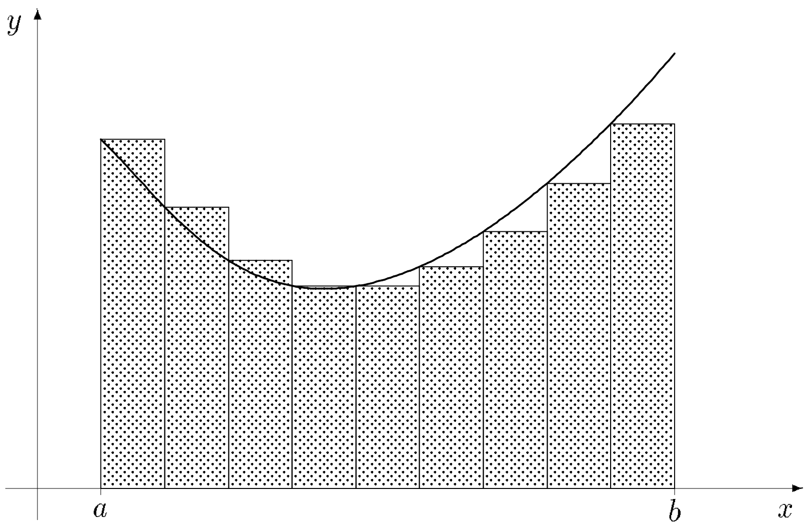
Pomóż zrozpaczonemu Docentowi Karolowi Juzkowi przyporządkować rysunki odpowiednim wzorom.



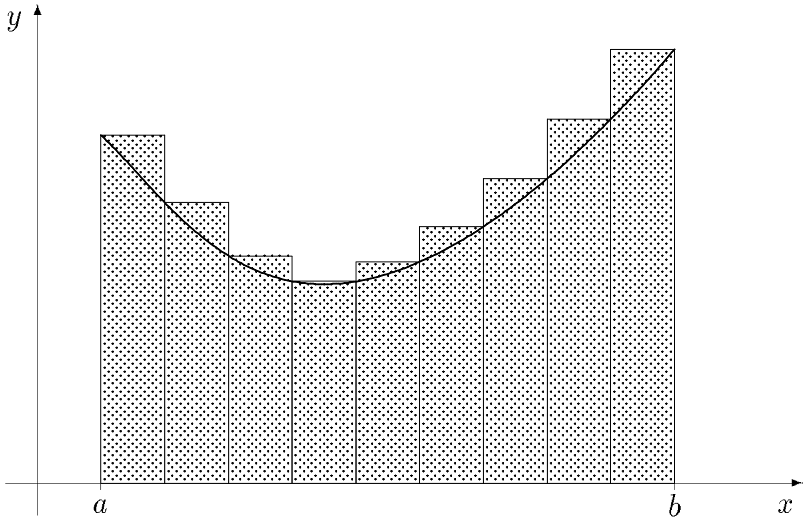
rys. 1



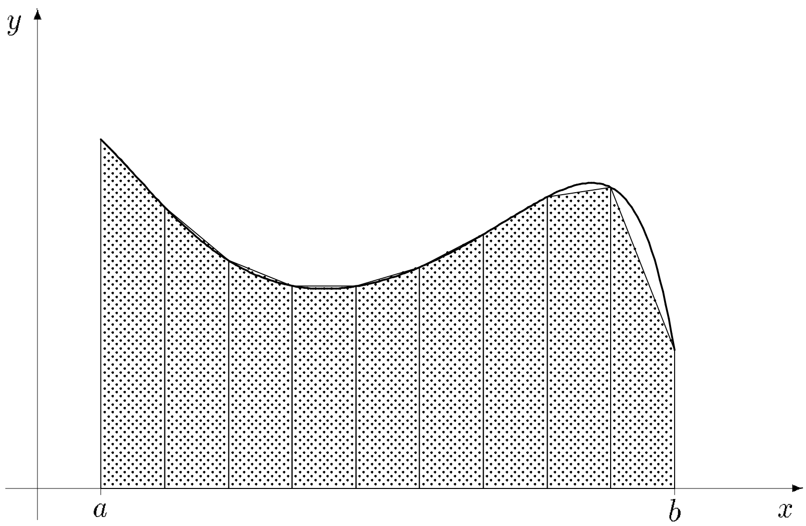
rys. 2



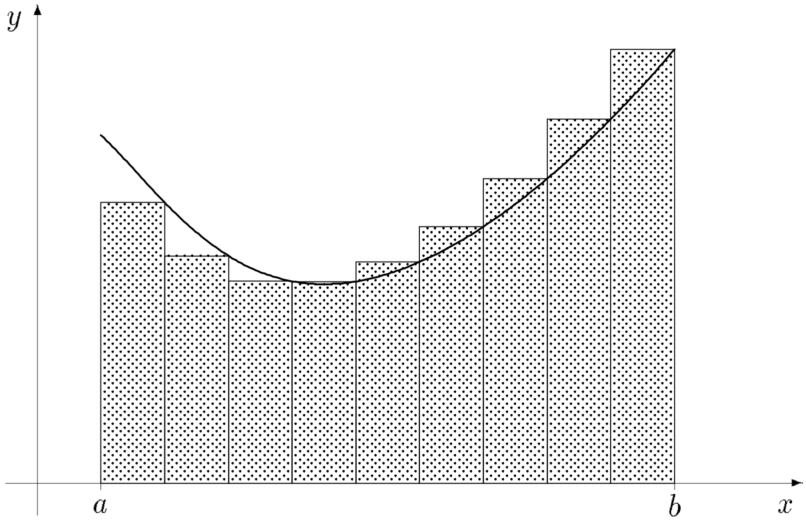
rys. 3



rys. 4



rys. 5



rys. 6

Podać wzór na $C_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(a+\frac{k(b-a)}{n})$ oraz obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}C_n$

702. $f(x)=1$, $a=5$, $b=8$ **703.** $f(x)=x$, $a=0$, $b=1$

704. $f(x)=x$, $a=1$, $b=5$ **705.** $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=5$

706. $f(x)=x^3$, $a=0$, $b=1$ **707.** $f(x)=2x+5$, $a=-3$, $b=4$

708. $f(x)=x^2+1$, $a=-1$, $b=2$ **709.** $f(x)=x^3+x$, $a=0$, $b=4$

710. $f(x)=e^x$, $a=0$, $b=1$

Obliczyć następujące całki poprzez konstrukcję ciągu podziałów dziedziny oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna

711. $\int\limits_2^4 x^{10}dx$ (**Wsk.** $2\cdot 2^{k/n}$) **712.** $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ (**Wsk.** $e^{k/n}$)

713. $\int\limits_0^{20} xdx$ **714.** $\int\limits_1^{10} e^{2x}dx$ **715.** $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}dx$ (**Wsk.** $\frac{k^3}{n^3}$) **716.** $\int\limits_{-1}^1 |x|dx$

717. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ (**Wsk.** $2^{k/n}$) **718.** $\int\limits_0^4 \sqrt{x}dx$ (**Wsk.** $\frac{4k^2}{n^2}$)

Obliczyć całki oznaczone:

719. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x^{1997} dx$ **720.** $\int_0^2 \operatorname{arctg}[x] dx$ **721.** $\int_0^2 [\cos x^2] dx$

722. $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$ **723.** $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3} dx$ **724.** $\int_{-13}^{2} \frac{1}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} dx$

725. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ **726.** $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x^3-x) dx$ **727.** $\int_0^1 x e^{-x} dx$

728. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ **729.** $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$ **730.** $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$

731. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$ **732.** $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ **733.** $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$

734. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ **735.** $\int_0^5 |x^2-5x+6| dx$ **736.** $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} dx$

737. $\int_1^2 x \log_2 x dx$ **738.** $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$ **739.** $\int_0^{6\pi} |\sin x| dx$

740. $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^{11} x dx$ **741.** $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$ **742.** $\int_0^{2\pi} (x-\pi)^{1997} \cos x dx$

Udowodnić następujące oszacowania

743. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx < 2$ **744.** $\frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1} dx < \frac{1}{2}$ **745.** $\frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8}$

746. $\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{1+x^2} dx < \frac{3}{2}$ **747.** $\int_0^1 x(1-x^{99+x}) dx < \frac{1}{2}$ **748.** $2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{1/x} dx$

749. $5 < \int_1^3 x^x dx < 31$ **750.** $\int_1^2 \frac{1}{x} dx < \frac{3}{4}$

Obliczyć granice

751. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$ **752.** $\lim_{n\to\infty} \frac{1^{20}+2^{20}+3^{20}+\ldots+n^{20}}{n^{21}}$

753. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right) \cdot n$

754. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{3n}}$

755. $\lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{2}{n} + \sin\frac{3}{n} + \ldots + \sin\frac{n}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$

756. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n} + \sqrt{4n+1} + \sqrt{4n+2} + \ldots + \sqrt{5n}\right) \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$

757. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{8n}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

758. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n}\cdot(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\ldots+\sqrt[3]{2n})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}$

759. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\frac{n}{n^2+16}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}$

760. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{5n}+\frac{4}{5n+3}+\frac{4}{5n+6}+\frac{4}{5n+9}+\ldots+\frac{4}{26n}$

761. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{7n}+\frac{1}{7n+2}+\frac{1}{7n+4}+\frac{1}{7n+6}+\ldots+\frac{1}{9n}$

762. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{7n^2}+\frac{1}{7n^2+1}+\frac{1}{7n^2+2}+\frac{1}{7n^2+3}+\ldots+\frac{1}{8n^2}$

763. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{n}}}+e^{\sqrt{\frac{2}{n}}}+e^{\sqrt{\frac{3}{n}}}+\ldots+e^{\sqrt{\frac{n}{n}}}\right)$

764. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\frac{1}{\sqrt{n+6}}+\frac{1}{\sqrt{n+9}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{7n}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$

765. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+0}{(3n)^3}+\frac{n^2+1}{(3n+1)^3}+\frac{n^2+2}{(3n+2)^3}+\frac{n^2+3}{(3n+3)^3}+\ldots+\frac{n^2+n}{(4n)^3}$

766. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2}+\frac{n}{2(n+1)^2}+\frac{n}{2(n+2)^2}+\frac{n}{2(n+3)^2}+\ldots+\frac{n}{50n^2}$

767. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2}+\frac{n}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{n^2+(n+2)^2}+\frac{n}{n^2+(n+3)^2}+\ldots+\frac{n}{50n^2}$

768. Udowodnić oszacowanie $\frac{19}{3}<\int\limits_2^3 x^x dx<\frac{65}{4}$. **Wskazówka:** Oszacować x^x przez x^a.

Obliczyć granice

769. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}\sqrt{3n}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{3n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}\sqrt{3n+2}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}\sqrt{3n+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{3n}\sqrt{4n}}$

Wskazówka: Niewymierność $\sqrt{(x+a)(x+b)}$ całkujemy wykonując podstawienie $t=\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$.

770. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\sin(n^2+0^2)}{n^2+0^2}+\frac{n+\sin(n^2+1^2)}{n^2+1^2}+\frac{n+\sin(n^2+2^2)}{n^2+2^2}+\frac{n+\sin(n^2+3^2)}{n^2+3^2}+\ldots$
$\ldots+\frac{n+\sin(n^2+n^2)}{n^2+n^2}$ **Wskazówka:** Skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

4. Całka oznaczona - zastosowania.

Obliczyć pole figury ograniczonej następującymi krzywymi

771. $y=x^2$ i $y=2x+5$

772. $y=e^x$ i prostą przechodzącą przez punkty $(0,1)$ i $(1,e)$

773. $y=\sin x$ i $y=\frac{2x}{\pi}$ **774.** $y=x^4$ i $y=x^3$ **775.** $y=\frac{1}{x}$ i $y=\frac{5}{2}-x$

776. $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{1}{x^3}$ i $x=2$

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć długość łuku krzywej $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$

777. x , 1 , 2 **778.** $2x-3$, -7 , 12

779. x^2 , 0 , 1 **Wsk.** Skorzystać z tablic całek.

780. e^x , 1 , 2 **781.** $\sqrt{x^3}$, 6 , 10 **782.** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, 0 , 1

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ wokół osi OX

783. x^3 , 0 , 5 **784.** e^{-x} , 0 , 10

785. $\sqrt{x}$, 0 , 4 **786.** $\sin x$, 0 , π **787.** $\cos 7x$, 0 , 2π

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ wokół osi OX

788. $\sqrt{x}$, 0 , 1 **789.** x , 1 , 5 **790.** x^7 , 0 , 10 **791.** e^x , -3 , 0

792. $\sin x$, 0 , $\frac{3\pi}{2}$

Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru ograniczonego podanymi krzywymi wokół osi OY

793. $y=e^x$, $y=0$ i $x=5$ **794.** $y=\sin x$ i $y=-\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$

795. $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$ i $x=2$ **796.** $y=\ln x$, $y=0$, $x=1$ i $x=e$

797. $y^2=1-(x-2)^2$

798. Obliczyć długość łuku krzywej $y=\sqrt{x+4}^{3}$, $0\leqslant x\leqslant 5$.

799. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $0\leqslant y\leqslant xe^{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$ wokół osi OX .

800. Obliczyć długość łuku krzywej $y=\ln x$, $1\leqslant x\leqslant \sqrt{3}$.

801. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru $\operatorname{arctg} x\leqslant y\leqslant \sqrt{\operatorname{arctg}^2 x+\sqrt{1+\sin x}}$, $0\leqslant x\leqslant \pi$ wokół osi OX .

802. Pomarańczę pokrojono na plastry równej grubości. Dowieść, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki. Zakładamy, że grubość skórki jest zaniedbywalna, a pomarańcza ma kształt kuli.

803. Od pomarańczy o grubej skórze odkrojono końce tak, aby ukazał się miąższ. Pozostałą część pokrojono na plastry równej grubości. Dowieść, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.