9-10. Funkcje: granica, ciągłość, własność Darboux, twierdzenie Weierstrassa.

Wykład: 2,6,9,13.12.2004

Ćwiczenia: 9,16.12.2004

Kolokwium nr 8: 13.12.2004 (jedno zadanie z funkcji i jedno powtórzeniowe)

Kolokwium nr 9: 20.12.2004 (jedno zadanie z funkcji i jedno powtórzeniowe)

Kolokwium nr 10: 3.01.2005 (powtórzeniowe)

Zadania (do samodzielnego rozwiązania i omówienia na ćwiczeniach)

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie δ , aby

$$\underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

393. $f(x)=2x$, $x_0=5$, $\varepsilon=1/10$ **394.** $f(x)=1/x$, $x_0=4$, $\varepsilon=1/100$

395. $f(x)=x^2$, $x_0=1$, $\varepsilon=1/50$ **396.** $f(x)=x^3$, $x_0=0$, $\varepsilon=1/1000$

397. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=30$, $\varepsilon=1/10$ **398.** $f(x)=x^4$, $x_0=10$, $\varepsilon=10^{-10}$

Postaraj się zrozumieć sens poniższych warunków (niektóre nie mają zbyt głębokiego sensu), gdzie f jest funkcją, a ε , x , y i z przebiegają liczby rzeczywiste, na tyle, aby stwierdzić, czy funkcje dane wzorami x^2, $\sin x$, $x+7$, x^4+16, 2^x je spełniają.

399. $\underset{x}{\exists} f(x)>x$ **400.** $\underset{x}{\forall}\underset{y}{\exists}\underset{z}{\forall} f(x)+f(y)=z$ **401.** $\underset{x}{\forall}\underset{z}{\forall}\underset{y}{\exists} f(x)+f(y)=z$

402. $\underset{x}{\forall}\underset{\varepsilon>0}{\exists} f(x)>\varepsilon$ **403.** $\underset{\varepsilon>0}{\exists}\underset{x}{\forall} f(x)>\varepsilon$ **404.** $\underset{x}{\exists}\underset{\varepsilon>0}{\forall} f(x)>\varepsilon$

405. $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{x}{\exists} f(x)>\varepsilon$ **406.** $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{x}{\exists} |f(x)|<\varepsilon$ **407.** $\underset{\varepsilon>0}{\exists}\underset{x}{\exists} f(x)=\varepsilon$

408. $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{x}{\exists}\underset{y}{\forall} f(x)+f(y)\neq\varepsilon$

409. $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\underset{\delta>0}{\exists}\underset{x>\delta}{\forall} f(x)=\delta+\varepsilon$

OSZUSTWO **410.** (przykład funkcji nieciągłej): Funkcja $f(x)=x^2$ jest nieciągła.

Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zakładając, że funkcja f jest ciągła, weźmy w definicji Cauchy'ego ciągłości $\varepsilon = 1$. Wtedy istnieje takie $\delta > 0$, że dla y spełniających nierówność $|y - x| < \delta$ zachodzi $|x^2 - y^2| < 1$.

Jednak ta ostatnia nierówność nie zawsze jest prawdziwa, gdyż dla $x > \frac{1}{\delta}$ i $y = x + \frac{\delta}{2}$ otrzymujemy $|x^2 - y^2| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > 1$.

□

Oszustwo **411.** (przykład funkcji ciągłej): Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

Dowód: Oczywiście f jest ciągła w każdym punkcie oprócz 0, pozostaje więc wykazać ciągłość w 0. Przeprowadzimy dowód niewprost. Zakładając, że f jest nieciągła w 0, weźmy $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Wtedy istnieje takie $\delta > 0$, że dla x spełniających nierówność $|x| < \delta$ zachodzi $|f(x) - 0| \geqslant \frac{1}{2}$.

Ale biorąc $x = \frac{1}{\pi n}$, gdzie $n > \frac{1}{\pi\delta}$, otrzymujemy $f(x) = 0$ i $|x| < \delta$. Zatem $|f(x) - 0| = 0 < \frac{1}{2}$, skąd sprzeczność.

□

Obliczyć następujące granice:

412. $\lim\limits_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7} - \frac{8}{x^2-6x-7}\right)$ **413.** $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ **414.** $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}$

415. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ **416.** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x+2}$

417. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-6x+5}{x-5}$ **418.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

419. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{1993}-1}{x^{10}-1}$ **420.** $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ **421.** $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

422. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **423.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$ **424.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

425. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **426.** $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1+\ln x}$ **427.** $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ **428.** $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$

Znaleźć dziedzinę oraz punkty ciągłości i nieciągłości funkcji f, jeśli $f(x)$ dane jest wzorem:

429. $\mathrm{sgn}(\sin x)$ **430.** $\{x\} - (\{x\})^2$

431. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x<0 \\ x & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1 \\ -x^2+4x-2 & \text{dla} \quad 1\leqslant x<3 \\ 4-x & \text{dla} \quad x\geqslant 3 \end{cases}$

432. $f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x\neq 2 \\ \mathrm{sgn}(x) & \text{dla} \quad x=2 \end{cases}$

433. $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ **434.** $\mathrm{sgn}(x^3-x)$ **435.** $[x]-[\sqrt[3]{x}]$

436. $x^3\mathrm{sgn}(x)$ **437.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}+1}$ **438.** $[x]$

439. $[x^2]$ **440.** $\{\log_2 x\}$ **441.** $\frac{1}{\{x\}}$ **442.** $\left|\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\right|$

OSZUSTWO **443.** Niech $f,g:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(0)=5$, $f(1)=7$, $g(0)=8$, $g(1)=4$. Wtedy istnieje takie $c\in(0,1)$, że $f(c)=g(c)$.

Dowód: Z własności Darboux funkcji ciągłych zastosowanej do funkcji f wynika, że dla pewnego $c\in(0,1)$ mamy $f(c)=6$. Podobnie stosując własność Darboux do funkcji g otrzymujemy $g(c)=6$. A zatem $f(c)=g(c)$, co należało dowieść.

□

11. Pochodna funkcji.

Wykład: 16,20.12.2004

Ćwiczenia: 6.01.2005

Kolokwium nr 11: 10.01.2005 (tylko pochodne)

444. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Korzystając **z definicji** pochodnej obliczyć $f'(8)$.

445. Niech $f(x)=x^5$. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na $f'(x)$.

Obliczyć pochodną funkcji zmiennej x o podanym wzorze. Podać, w jakim zbiorze istnieje pochodna.

446. $3x^2-5x+1$ **447.** $(\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)$ **448.** $\frac{1-x^3}{1+x^3}$

449. $(1+\sqrt{x})(1+x^{1/3})(1+x^{1/4})$ **450.** $(x^2+1)^4$ **451.** $\frac{x+1}{x-1}$
452. $\frac{x}{x^2+1}$ **453.** $(1+2x)^{30}$ **454.** $(\frac{1}{1+x^2})^{1/3}$
455. $\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$ **456.** 2^{x+3} **457.** $x10^x$
458. $\frac{x}{e^x}$ **459.** $x^2(x+1)e^x$ **460.** $e^x\ln x$
461. $\frac{\ln x}{e^x}$ **462.** e^{x^2} **463.** $x^{10}\ln x$
464. e^{e^x} **465.** $\ln\ln x$ **466.** $\log_{10}(x-1)$
467. 10^{2x-3} **468.** 2^{3^x} **469.** $\log_2|\log_3(\log_5 x)|$
470. $e^{\sqrt{\ln x}}$ **471.** x^{x^2} **472.** x^{x^x}
473. $x^{\sqrt{x}}$ **474.** $(\ln x)^x$ **475.** $e^{-x^2}\ln x$
476. $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ **477.** $x^5(x^6-8)^{1/3}$ **478.** $e^{2x+3}(x^2-x+\frac{1}{2})$
479. $\ln\frac{1}{1+x}$ **480.** $\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$ **481.** $|x|$
482. $\mathrm{sgn}(x)$ **483.** 0 dla $x<0$, x^2 dla $x\geqslant 0$
484. $e^{-|x|}$ **485.** $\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}$ **486.** $\{x\}$
487. x dla $x<0$, x^2 dla $x\geqslant 0$ **488.** $\mathrm{sgn}(x^5-x^3)$
489. $\frac{\pi^{10}}{x-e}$ **490.** e^x dla $x<0$, $1+x$ dla $x\geqslant 0$
491. x^7+e^2 **492.** $(x+e)^{20}$ **493.** e^e

Obliczyć pochodną rzędu 3 następujących funkcji zmiennej x

494. $(x+1)^6$ **495.** x^6-4x^3+4 **496.** $\frac{1}{1-x}$
497. $x^3\ln x$ **498.** e^{2x-1} **499.** $\cos x$
500. $(x^2+1)^3$ **501.** e^{x^2} **502.** $\ln(x^2)$ **503.** $(x-7)^{50}$

Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu n funkcji danej wzorem

504. $\ln(x^{10})$ **505.** $x\ln x$ **506.** $\sqrt{x}$
507. $x^2\sin x$ **508.** $\frac{1-x}{1+x}$ **509.** xe^x
510. $\sin 5x$ **511.** x^7 **512.** e^{4x}
513. $x+\frac{1}{x}$ **514.** x^2e^{-x} **515.** $\sin^2 x$

516. Dowieść, że $(f(x)g(x))^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.