6. Kresy zbiorów.

Wykład: 8.11.2004 , ćwiczenia: 18.11.2004,

kolokwium nr 5 (jedno zadanie z kresów i jedno z ciągów): 22.11.2004

Definicja: Zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z góry, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in Z}{\forall}\quad x\leqslant M\,.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M\in\mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\underset{x\in Z}{\forall}\quad x\leqslant M$$

nazywamy ograniczeniem górnym zbioru Z.

Definicja: Zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z dołu, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in Z}{\forall}\quad x\geqslant M\,.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M\in\mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\underset{x\in Z}{\forall}\quad x\geqslant M$$

nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru Z.

Definicja: Zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym, jeżeli jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry.

Definicja: Jeżeli niepusty zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to kresem górnym zbioru Z nazywamy jego najmniejsze ograniczenie górne i stosujemy oznaczenie $\sup Z$. Istnienie takiego najmniejszego ograniczenia wynika z zasady ciągłości Dedekinda. Jeżeli zbiór Z jest nieograniczony z góry, przyjmujemy $\sup Z=+\infty$. Ponadto przyjmujemy $\sup\emptyset=-\infty$. Analogicznie określamy kres dolny zbioru, oznaczany przez $\inf Z$.

Wniosek: Jeżeli niepusty zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to liczba G jest jego kresem górnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x\in Z}\ x\leqslant G$$

oraz

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{x\in Z}\ x>G-\varepsilon\,.$$

Zadania.

Znaleźć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

237. $\{x\in\mathbb{R}:\ x^2<2\}$ **238.** $\{\frac{10^n}{n!}:\ n\in\mathbb{N}\}$ **239.** $\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\}$

240. $\{x\in\mathbb{R}:\ x^4\geqslant 5\}$ **241.** $\{\frac{m^2+n^2}{2mn}:\ m,n\in\mathbb{N}\ ,\ m<n\}$

Niech A i B będą niepustymi ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych. Niech $a_1=\inf A$, $a_2=\sup A$, $b_1=\inf B$, $b_2=\sup B$. Co można powiedzieć o następujących kresach:

242. $\sup(A\cup B)$ **243.** $\inf(A\cup B)$

244. $\sup(A\cap B)$ **245.** $\inf\{-a:\ a\in A\}$

246. $\sup\{a+b:\ a\in A, b\in B\}$ **247.** $\sup\{a^2:\ a\in A\}$

248. $\inf\{a^2:\ a\in A\}$

249. Zbiory A i B są niepuste i ograniczone. Zbiór B jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór $\{\frac{a}{b}:\ a\in A, b\in B\}$ musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

250. A jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że $\inf A=-1$, $\sup A=2$. Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru $\{|a|:\ a\in A\}$? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

Naszkicować wykres funkcji danej wzorem

251. $f(x)=\inf\{|x-a|:\ a\in(2{,}3)\}$

252. $f(x)=\sup\{|x-a|:\ a\in(2{,}3)\}$

253. $f(x)=\inf\{|x-a|:\ a\in\{1\}\cup[4{,}6)\}$

254. $f(x)=\sup\{|x-a|:\ a\in\{1\}\cup[4{,}6)\}$

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g=\sup A$?

255. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a<g+\varepsilon\right)$

256. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, |a-g|<\varepsilon\right)$

257. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-2\varepsilon\right)$

258. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Naszkicować wykres funkcji danej wzorem

259. $f(x)=\sup\{\frac{x}{a}:\ a\in(1{,}4)\}$

260. $f(x)=\sup\{xa:\ a\in(1{,}4)\}$

261. $f(x)=\inf\{|x+a|:\ a\in(2,\infty)\}$

262. $f(x)=\inf\{|x-n|:\ n\in\mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych

263. $f(x)=\inf\{|x-n^2|:\ n\in\mathbb{Z}\}$

264. $f(x)=\inf\{(x-a)^2:\ a\in(0{,}2]\cup(5{,}8)\cup\{10\}\ \}$

265. $f(x)=\inf\{|x-\frac{1}{n}|:\ n\in\mathbb{N}\}$, $\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych

266. $f(x)=\sup\{|x-\frac{1}{n}|:\ n\in\mathbb{N}\}$

267. $f(x)=\inf\{|x^2-a|:\ 1\leqslant a<3\}$

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g=\sup A$?

268. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\frac{1}{n}\right)$

269. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, n^2(g-a)<\frac{1}{n}\right)$

270. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a<g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\,(a-g)^2<\varepsilon\right)$

271. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\,(a-g)^2<\varepsilon\right)$

272. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>\varepsilon\right)$

273. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon<g}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\varepsilon\right)$

274. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{0<\varepsilon<1}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\varepsilon\right)$

275. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a\geqslant g-\varepsilon\right)$

276. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon\geqslant 0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a\geqslant g-\varepsilon\right)$

277. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{\varepsilon\geqslant 0}{\forall}\,\underset{a\in A}{\exists}\, a>g-\varepsilon\right)$

278. $\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\,\underset{b\in A}{\exists}\, b\geqslant\frac{g+a}{2}\right)$

279. $\left(\underset{a\in A}{\exists}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\,\underset{b\in A}{\exists}\, b\geqslant\frac{g+a}{2}\right)$

280. $\left(\underset{a\in A}{\exists}\, a^2\geqslant 0\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\, a\leqslant g\right)\wedge\left(\underset{a\in A}{\forall}\,\underset{b\in A}{\exists}\, b\geqslant\frac{g+a}{2}\right)$

281. $\left(\exists_{a\in A} a\leqslant g\right)\wedge\left(\forall_{\varepsilon>0}\exists_{a\in A} a>g-\varepsilon\right)$

Niepotrzebne skreślić.

W każdej parze ramek tylko jedna zawiera sensowne uzupełnienie tekstu matematycznego.

TWIERDZENIE **282.** Niech A i B będą niepustymi zbiorami ograniczonymi. Niech

$C=\{a-b\colon\ a\in A\wedge b\in B\}$. Wtedy $\inf C=$ $\boxed{\inf A-\sup B}\boxed{\sup B-\inf A}$.

Dowód:

Niech $d=\inf A$ i $g=\sup B$. Wtedy z warunku $d=\inf A$ wynika, że

(1) $\boxed{\forall_{a\in A}}\boxed{\exists_{a\in A}}\ \boxed{a\leqslant d}\boxed{a\geqslant d}$

oraz

(2) $\boxed{\forall_{\varepsilon>0}}\boxed{\exists_{\varepsilon>0}}\ \boxed{\forall_{a\in A}}\boxed{\exists_{a\in A}}\ \boxed{a<d+\varepsilon}\boxed{a>d-\varepsilon}$.

Podobnie z warunku $g=\sup B$ wynika

(3) $\boxed{\forall_{b\in B}}\boxed{\exists_{b\in B}}\ \boxed{b\leqslant g}\boxed{b\geqslant g}$

oraz

(4) $\boxed{\forall_{\varepsilon>0}}\boxed{\exists_{\varepsilon>0}}\ \boxed{\forall_{b\in B}}\boxed{\exists_{b\in B}}\ \boxed{b<g+\varepsilon}\boxed{b>g-\varepsilon}$.

Chcemy wykazać, że $\inf C=e$, gdzie $e=\boxed{d-g}\boxed{g-d}$, czyli, że

(5) $\boxed{\forall_{c\in C}}\boxed{\exists_{c\in C}}\ \boxed{c\leqslant e}\boxed{c\geqslant e}$

oraz

(6) $\boxed{\forall_{\varepsilon>0}}\boxed{\exists_{\varepsilon>0}}\ \boxed{\forall_{c\in C}}\boxed{\exists_{c\in C}}\ \boxed{c<e+\varepsilon}\boxed{c>e-\varepsilon}$.

W dowodzie warunku (5) skorzystamy z (1) i (3).

Zakładając (5) wykażemy prawdziwość warunków (1) i (3).

$\boxed{\text{Dowolna}}\boxed{\text{Istnieje}}$ liczba $c \in C$ $\boxed{\text{jest}}\boxed{\text{będąca}}$ postaci $c = a - b$, gdzie $a \in A$ i $b \in B$. Z nierówności $\boxed{a \leqslant d}\boxed{a \geqslant d}$ i $\boxed{b \leqslant g}\boxed{b \geqslant g}$ otrzymujemy $\boxed{a - b \leqslant e}\boxed{a - b \geqslant e}$, co dowodzi (5).

$\boxed{\text{Załóżmy}}\boxed{\text{Wykażemy}}$ teraz prawdziwość warunku (6).

$\boxed{\text{Niech } \varepsilon \text{ będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy}}$

$\boxed{\text{Znajdziemy taką liczbę dodatnią } \varepsilon\text{, dla której}}$

istnieje $a \in A$ takie, że $\boxed{a > d - \varepsilon}\boxed{a < d + \frac{\varepsilon}{2}}$ oraz $b \in B$ takie, że $\boxed{b < g + \varepsilon}\boxed{b > g - \frac{\varepsilon}{2}}$. Zatem liczba $c = a - b$ spełnia nierówność $\boxed{c < e + \varepsilon}\boxed{c > e - \varepsilon}$, co kończy dowód warunku (6).

7. Szeregi liczbowe. Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych.

8. Liczba e. Szeregi liczbowe o wyrazach dowolnych.

Wykład: 18,22,25,29.11.2004

Ćwiczenia: 25.11, 2.12.2004

Kolokwium nr 6 (szeregi o wyrazach nieujemnych): 29.11.2004

Kolokwium nr 7 (kolokwium powtórzeniowe - od początku semestru do końca tej listy): 6.12.2004

Przykłady (omawiane na wykładzie)

283. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ **284.** $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ **285.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

286. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+2n+7}$ **287.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^4-n+7}$ **288.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+10}{2n^4+n^3+7}$

289. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+10}{2n^4+n^3+7}$

290. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ z kryterium porównawczego

291. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{5^n}$ **292.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{\pi^n}$ **293.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{77^{77^n}}{10^{n^2}}$

294. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^{n^2}}$ **295.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ **296.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n\sqrt{n}}$

297. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\sin n}{n^3+n^2+7}$ **298.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ **299.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

300. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+10}$ **301.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log_2 n}$

302. Liczba e jako suma szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ oraz granica $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

303. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{7}{n})^n$ **304.** $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n})^n$

305. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log_2^a n}$ - kryterium o zagęszczaniu

306. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n F_n}{5^n}$ F_n - ciąg Fibonacciego

307. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+n^{10}}{6^n+n^{20}}$ **308.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n n!}{n^n}$

309. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1000}$ - czy szereg jest zbieżny, bezwzględnie zbieżny, warunkowo zbieżny.

310. $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots$

Zadania (do samodzielnego rozwiązania i omówienia na ćwiczeniach)

Obliczyć $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, a następnie znaleźć $\lim_{n\to\infty} S_n$:

311. $a_k=\frac{1}{k(k+1)}$ **312.** $a_k=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ **313.** $a_k=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

314. $a_k=\frac{1}{7^k}$ **315.** $a_k=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ **316.** $a_k=\frac{2^k+5^k}{10^k}$

317. $a_1=1$, $a_k=\log_2(\frac{k^2}{k^2-1})$ dla $k\geqslant 2$

318. Dowieść, że $4<\sum_{n=1}^{127}\frac{1}{n}<7$.

319. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne

320. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ **321.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ **322.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n^2+1}$ **323.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$

324. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-5}{n^3+6n^2+8n+47}$ **325.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$

326. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$ **327.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ **328.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$

329. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ **330.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ **331.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$ **332.** $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$

333. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^3}}{3^n}$ **334.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}}$ **335.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ **336.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$

337. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$ **338.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$ **339.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ **340.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{\sqrt[10]{n!}}$

341. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+\operatorname{arctg} n}$ **342.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{2^n}}$ **343.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+\pi}{n^\pi+e}$

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

344. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\, a_n > 0$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

345. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

346. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\, a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

347. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leqslant 100$, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

348. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

349. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

350. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\log_{10} n}$ jest zbieżny.

351. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

352. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

353. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}-1})$$

jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

354. Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

355. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

356. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.

Obliczyć granice

357. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$ **358.** $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{5}{n})^n$

Które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne:

359. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ **360.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n}$

361. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ **362.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n+1}{n}$

363. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}}$ **364.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^7\sqrt{n}}{F_n}$ F_n - ciąg Fibonacciego

365. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$ **366.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot(-5)^n}{n^n\cdot 2^n}$ **367.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-50)(-1)^n}{n^2}$

368. $1-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots+1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}-\ldots-\frac{1}{k}+\ldots$

(k razy)

369. $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}-\ldots-\frac{1}{k^2}+\ldots$

(k razy)

370. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}$ **371.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ **372.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}$ **373.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 77n}{n^2}$

374. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+17}{3^n}$ **375.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!+1}}{n!}$ **376.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}$ **377.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\log_2 n}$

378. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-15)}{n^2}$ **379.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F_n}$ F_n - ciąg Fibonacciego

380. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-10n+1}$ **381.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}(-1)^n$ **382.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$

383. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+5\sqrt{n}+27}$ **384.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{n!}$ **385.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{4^{\binom{n}{2}}}$ **386.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$

387. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{2^n}$ **388.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}$ **389.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(\ln n)^{\ln n}(-1)^n}{n^{\ln\ln n}}$

390. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\mathrm{arctg} n}$ **391.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-2004}$ **392.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)(-1)^n$

Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. Warunek konieczny zbieżności.

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. Zbieżność szeregu nie zależy od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. Kryterium porównanwcze.

Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant b_n$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. Kilka szeregów.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^a$ jest zbieżny dla $a < -1$, rozbieżny dla pozostałych a.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a. Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. Kryterium d'Alemberta.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=g<1\ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=g>1\ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. Zbieżność bezwzględna.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|<\infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

7. Szeregi naprzemienne.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1}$ jest zbieżny.