Kwantyfikatory.

W poniższych zadaniach x, y przebiegają liczby rzeczywiste, natomiast m, n przebiegają liczby naturalne (całkowite dodatnie).

W kolejnych siedmiu zadaniach każdemu warunkowi oznaczonemu literą przypisać równoważny warunek oznaczony cyfrą.

160. **a)** $x>0 \Rightarrow -x>0$ **b)** $x>0 \Rightarrow |x|>0$
c) $-x>0 \Rightarrow x>0$ **d)** $|x|>0 \Rightarrow x>0$
1) $x \geqslant 0$ **2)** $x \leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

161. **a)** $\underset{x}{\forall}\,(x>0 \Rightarrow -x>0)$ **b)** $\underset{x}{\forall}\,(x>0 \Rightarrow |x|>0)$
c) $\underset{x}{\forall}\,(-x>0 \Rightarrow x>0)$ **d)** $\underset{x}{\forall}\,(|x|>0 \Rightarrow x>0)$
1) $x \geqslant 0$ **2)** $x \leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

162. **a)** $\underset{x}{\exists}\,(x>0 \Rightarrow -x>0)$ **b)** $\underset{x}{\exists}\,(x>0 \Rightarrow |x|>0)$
c) $\underset{x}{\exists}\,(-x>0 \Rightarrow x>0)$ **d)** $\underset{x}{\exists}\,(|x|>0 \Rightarrow x>0)$
1) $x \geqslant 0$ **2)** $x \leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

163. **a)** $\underset{y}{\forall}\; x>y^2$ **b)** $\underset{y}{\exists}\; x>y^2$ **c)** $\underset{y}{\forall}\; x<y^2$ **d)** $\underset{y}{\exists}\; x<y^2$
1) $x<0$ **2)** $x>0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

164. **a)** $\underset{y}{\forall}\; x=y$ **b)** $\underset{y}{\exists}\; x=y$ **c)** $\underset{y}{\forall}\; x\neq y$ **d)** $\underset{y}{\exists}\; x\neq y$
1) $x=0$ **2)** $x>0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

165. **a)** $\underset{y}{\forall}\; x^2=-y^2$ **b)** $\underset{y}{\exists}\; x^2=-y^2$
c) $\underset{y}{\forall}\; x^2\neq -y^2$ **d)** $\underset{y}{\exists}\; x^2\neq -y^2$
1) $x=0$ **2)** $x\neq 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

166. **a)** $\forall_{y}\ xy = y$ **b)** $\exists_{y}\ xy = y$ **c)** $\forall_{y}\ xy = x$ **d)** $\exists_{y}\ xy = x$

1) $x = 0$ **2)** $x = 1$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

167. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{n>1000}\ |a_n - 100| < 10\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) ciąg (a_n) jest zbieżny,

b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,

c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,

d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,

e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,

f) $a_{666} < 7777777$,

g) $a_{1111} > 88$,

h) $\forall_{n>1729}\ |a_n - 100| < 1\,,$

i) $\forall_{n>345}\ |a_n - 100| < 17\,,$

j) $\forall_{n>5555}\ |a_n - 99| < 13\,,$

k) ciąg (a_n) jest ograniczony,

l) $\exists_{n>444}\ |a_n - 95| < 37\,,$

m) $\exists_{n>4444}\ |a_n - 80| < 37\,,$

n) $\exists_{n<444}\ |a_n - 95| < 37\,,$

o) $\exists_{n<4444}\ |a_n - 80| < 37\,,$

p) $\forall_{m}\ \exists_{n>m}\ a_n > 0\,,$

q) $\forall_{n>1331}\ |a_n - 66| > 12\,,$

r) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall}\ |a_n - a_m| < 7$,

s) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall}\ |a_n - a_m| < 17$,

t) $\underset{m>123}{\forall}\ \underset{n>45678}{\forall}\ |a_n - a_m| < 27$,

u) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall}\ |a_n - a_m| < 37$,

v) $\underset{m<123}{\exists}\ \underset{n<456}{\exists}\ |a_n - a_m| < 3$,

w) $\underset{m>12345}{\forall}\ \underset{n>67890}{\forall}\ |a_n + a_m| < 210$,

x) $\underset{m>1296}{\forall}\ \underset{n>7776}{\forall}\ |a_n + a_m| < 222$,

y) $\underset{m>1024}{\forall}\ \underset{n>8192}{\forall}\ |a_n + a_m| > 128$,

z) $\underset{n}{\exists}\ a_n < 92$,

ż) $\underset{n}{\exists}\ a_n > 91$.

4-5. Ciągi.

Wykład: 21,25,28.10, 4.11.2004 , ćwiczenia: 28.10, 4.11.2004,

kolokwium nr 4 (wraz z kwantyfikatorami): 8.11.2004

Przykłady (omawiane na wykładzie)

168. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ - dowód z definicji.

169. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$ - dowód z definicji.

170. Granica sumy jest sumą granic - dowód.

171. Ciąg zbieżny jest ograniczony - dowód.

172. Granica iloczynu jest iloczynem granic - dowód.

173. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n+1}=2$ - dowód z definicji.

174. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n+2}=3$ - dowód z definicji.

175. $\frac{2n+5}{n+1}\not\to 3$ - dowód z definicji.

176. Warunek Cauchy'ego - każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego (dowód).

177. Ciąg $a_n=(-1)^n$ jest rozbieżny.

178. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

179. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n$.

180. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1000}}{2^n}$ (z kryterium d'Alemberta).

181. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{2^{n^2}}$ (z kryterium d'Alemberta).

Trochę teorii

DEFINICJA: Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,\underset{N}{\exists}\,\underset{n\geqslant N}{\forall}\,|a_n-g|<\varepsilon\ .$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=g$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{M}{\forall}\,\underset{N}{\exists}\,\underset{n\geqslant N}{\forall}\,a_n>M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M}\exists_{N}\forall_{n\geqslant N} a_n < M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

TWIERDZENIA:

1. CIĄG ZBIEŻNY MA TYLKO JEDNĄ GRANICĘ.

2. GRANICA SUMY JEST SUMĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n+b_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

3. GRANICA RÓŻNICY JEST RÓŻNICĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n-b_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

4. GRANICA ILOCZYNU JEST ILOCZYNEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_nb_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

5. GRANICA ILORAZU JEST ILORAZEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n \neq 0$ oraz

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \; .$$

6. Zbieżność i granica nie zależą od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów ciągu.

7. Słabe nierówności zachowują się przy przejściu do granicy.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $a_n \leqslant b_n$ (odpowiednio $a_n \geqslant b_n$), to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$).

8. Kilka podstawowych granic.

$\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} a = a$

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ dla $a > 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ dla $|a| < 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ nie istnieje nawet w sensie granicy niewłaściwej

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

9. Z granicą można wchodzić pod pierwiastek.

Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n \geqslant 0$, to dla $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n} \; .$$

10. Twierdzenie o trzech ciągach.

Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunek

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$

oraz ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, to ciąg (b_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g.

11. Kryterium d'Alemberta.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g < 1 \ ,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g > 1 \ ,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Powyższe własności zachowują się w przypadku ciągów mających granice niewłaściwe (tzn. rozbieżnych do $\pm\infty$), o ile nie prowadzi to do wyrażeń nieoznaczonych.

12. Sztuczki.

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

Zadania (do samodzielnego rozwiązania i omówienia na ćwiczeniach)

182. Dowieść **z definicji**, że ciąg $a_n = \frac{n+7}{2n+5}$ jest zbieżny.

183. Dowieść **z definicji**, że ciąg $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ jest zbieżny.

184. Dany jest taki ciąg (a_n), że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant 5/\varepsilon}{\forall} |a_n - 7| < \varepsilon \ .$$

Podać granicę ciągu (a_n).

Wskazać taką liczbę M, że $\underset{n}{\forall} |a_n| < M$.

Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} a_n > 6$.

Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} a_n < 7{,}01$.

Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} |a_n - 8| > 1/3$.

185. Dany jest taki ciąg (b_n), że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant 10/\varepsilon}{\forall} |b_n + 2| < \varepsilon \ .$$

Podać granicę ciągu (b_n).

Wskazać taką liczbę M, że $\underset{n}{\forall} |b_n| < M$.

Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} b_n < 0$.

Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} b_n > -3$.

Wskazać taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} |b_n - 2| > 1/10$.

186. Niech $c_n = a_n + b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są ciągami z poprzednich dwóch zadań. Dowieść, że wówczas ciąg (c_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant ..../\varepsilon}{\forall} |c_n - 5| < \varepsilon \; .$$

W miejscu kropek powinna się znaleźć odpowiednio dobrana liczba.

187. Niech $d_n = a_n \cdot b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są jak poprzednio. Dowieść, że wówczas ciąg (d_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant ....}{\forall} |d_n + 14| < \varepsilon \; .$$

W miejscu kropek powinno się znaleźć odpowiednio dobrane wyrażenie zależne od ε.

188. Niech $e_n = 2a_n + 3b_n$. Dowieść, że wówczas ciąg (e_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant ..../\varepsilon}{\forall} |e_n - ....| < \varepsilon \; .$$

W miejscu kropek powinny się znaleźć odpowiednio dobrane liczby.

Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego podanym wzorem; obliczyć granice ciągów zbieżnych, rozstrzygnąć czy ciągi rozbieżne mają granicę niewłaściwą

189. $\frac{n}{n+7}$ **190.** $2^n - \frac{1}{n}$ **191.** $\frac{4n^2+3n}{n+1}$ **192.** $\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$

193. $\frac{1-2+3-4+5-6+...-2n}{\sqrt{n^2+2}}$ **194.** $\frac{1+2+4+...+2^n}{1+3+9+...+3^n}$ **195.** $\frac{1}{1+\sqrt{n}}$

196. $n \cdot (-1)^n$ **197.** $\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^7}{n^3(1+7\sqrt{n+2})}$ **198.** $\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$

199. $\frac{3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n}{3^n}$ **200.** $\frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$ **201.** $\sqrt[n^2]{n}$

202. $\sqrt[n]{n^2}$ **203.** $\sqrt[n]{n+17}$ **204.** $\sqrt{n^2+n} - n$ **205.** $n(\sqrt{n^2+7} - n)$

206. $\frac{7n+(\sqrt[3]{n}\,\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$ **207.** $\frac{n^2+n+1}{(n+\sin n)^2}$ **208.** $\frac{(-1)^n}{n}$ **209.** $\frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$

210. $a_n=\begin{cases}(-1)^n\cdot n! \text{ dla } n\leqslant 100\\ \frac{2^n}{2^n+n} \text{ dla } n>100\end{cases}$ **211.** $\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\frac{n^2+3}{n^3+3}+\ldots+\frac{n^2+n}{n^3+n}$

212. $\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}$ **213.** $\log_2 n$ **214.** $\frac{\log_2(2n)}{\log_2 n}$ $(n>1)$

215. $\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n}$ $(n>1)$ **216.** $\frac{n^7}{7^n}$ **217.** $\frac{10^n}{n!}$ **218.** $\frac{n!}{n^{22}}$

219. $\frac{\sqrt{3^n+n^2}}{\sqrt{3^n+2^n+1}}$ **220.** $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$ **221.** $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)^2}$

222. Dla których liczb rzeczywistych a istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+n^a}-\sqrt[3]{n}\right)$ i ile wynosi?

Wyjaśnić, dlaczego poniżej są same **BZDURY**:

223. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=0\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=0$

224. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty-\infty=0$

225. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=\begin{cases}-1 & \text{dla} \quad n \quad \text{nieparzystych}\\ 1 & \text{dla} \quad n \quad \text{parzystych}\end{cases}$

226. $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{n}=k\cdot\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{n}=k\cdot 0=0$

PRAWDA CZY FAŁSZ?

227. Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg (a_n+b_n) jest rozbieżny.

228. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg (a_n+b_n) jest rozbieżny.

229. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg (a_nb_n) jest rozbieżny.

230. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg (a_nb_n) jest rozbieżny.

231. Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.

232. Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{2}$, to $a_n \to \frac{1}{2}$.

233. Jeżeli ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

234. Jeżeli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

235. Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodanie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

236. Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

Kolokwia, zaliczenie.

Daty pozostałych kolokwiów:

5 - 22.11.2004

6 - 29.11.2004

7 - 6.12.2004

8 - 13.12.2004

9 - 20.12.2004

10 - 3.01.2005

11 - 10.01.2005

12 - 17.01.2005

Oceny z zaliczenia wystawiane będą według wspólnych zasad dla wszystkich grup ćwiczeniowych. Pod uwagę brane będą wyniki 10 kolokwiów. Jeżeli student pisał więcej kolokwiów, najsłabsze oceny nie będą brane pod uwagę. Student nieobecny na kolokwium otrzymuje ocenę 0 bez względu na przyczynę nieobecności. Przypadki osób nieobecnych na więcej niż dwóch kolokwiach z przyczyn usprawiedliwionych (np. długotrwała choroba) będą rozpatrywane indywidualnie. O ocenie z zaliczenia decyduje suma punktów z 10 kolokwiów według poniższej skali:

50 - 3.0

60 - 3.5

70 - 4.0

80 - 4.5

90 - 5.0

Prowadzący ćwiczenia ma prawo na podstawie aktywności studenta na zajęciach podnieść mu ocenę z zaliczenia o pół stopnia, **o ile student uzyskał z 10 najlepszych kolokwiow co najmniej 50 punktów**.

Do egzaminu mogą przystąpić tylko ci studenci, którzy wcześniej uzyskali zaliczenie ćwiczeń.

Reklamacje dotyczące ocen z kolokwiów należy zgłaszać prowadzącemu ćwiczenia w ciągu tygodnia od otrzymania ocenionej pracy.

Studenci 3-letnich studiów licencjackich mogą uzyskać zaliczenie po zdobyciu 45 punktów z 10 najlepszych kolokwiów.