1. Powtórka ze szkoły.

Wykład: 4.10.2004 (4 godziny), ćwiczenia: 7.10.2004, kolokwium nr 1: 11.10.2004

Obliczyć sumy (postępów arytmetycznych i geometrycznych):

1. $\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}+...+103$

2. $4+6+9+...+\frac{3^{100}}{2^{98}}$

3. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{100}}$

4. $7+9+11+13+...+(6n+1)$

5. $5+15+25+35+45+55+65+...+(100n+55)$.

6. $5+8+11+14+...+101$

7. $-17-13-9-...+99$

8. $27+81+243+...+3^{33}$

9. $1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4+...+2^n$

10. Obliczyć sumę $1\cdot 2+2\cdot 3+4\cdot 5+8\cdot 9+16\cdot 17+...+2^n\cdot(2^n+1)$.

11. Drugi, piąty i dziesiąty wyraz pewnego postępu arytmetycznego tworzą postęp geometryczny trójwyrazowy. Jaki jest iloraz tego postępu geometrycznego?

12. Obliczyć $1+2+4+7+8+10+13+14+16+19+...+1000$, gdzie różnice między kolejnymi składnikami tworzą ciąg okresowy 1,2,3,1,2,3,1,2,3,...

13. Obliczyć
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{2187},$$
gdzie w mianownikach znajdują się potęgi dwójki i trójki ustawione rosnąco.

14. Udowodnić, że dla dowolnych $a,b\in\mathbb{R}$ zachodzi nierówność trójkąta
$$|a+b|\leqslant|a|+|b|\ .$$
Wskazówka: Rozpatrzyć przypadki:
1° $a,b\geqslant 0$,

2° $a \geqslant 0,\ b < 0,$
3° $a < 0,\ b \geqslant 0,$
4° $a,b < 0,$

Rozwiązać równania i nierówności

15. $|3x|+2 \leqslant |x-6|$

16. $|x^2-25| \leqslant 24$

17. $|x|+|x+1|+|x+2| = x^2+2x+\frac{29}{9}$

18. $|x+10| = |2x+1|+3$

Naszkicować wykres funkcji f danej wzorem:

19. $f(x) = |x+1|+|2x+4|-|3x+9|$

20. $f(x) = |x-1|+|x+4|$

Czy jest prawdą, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x zachodzi nierówność:

21. $x \leqslant |x|$

22. $-x \leqslant x$

23. $1 \leqslant |1+x|+x$

24. $-1 \leqslant |-1+x|+x$

25. $1 \leqslant |1-x|+x$

26. $-1 \leqslant |-1-x|+x$

27. $x \leqslant |x+1|+1$

28. $-x \leqslant |-x+1|+1$

29. $x \leqslant |x-1|+1$

30. $-x \leqslant |-x-1|+1$

31. Uprościć wyrażenie $4^{2+\log_2 7}$.

32. Uprościć wyrażenie $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$.

Naszkicować wykres funkcji danej wzorem

33. $\sqrt{x+5}-3$ **34.** $|2^x-1|$ **35.** $2^{|x+3|}$

36. x^3+3x^2+3x **37.** $f(x) = (x+7)\sqrt{x+7}-8$

38. $4^{\log_2 x}+|x^2-1|$

39. $2^{x+2}-8$ **40.** $\sqrt{x-1}+3$ **41.** $(x+4)^{1/3}$

42. $1+\log_2(x-4)$ **43.** $\frac{x^2+x}{|x^3-x|}$

Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

44. $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$? **45.** $\log_2 3$ czy $\log_3 5$

46. $\log_3 7$ czy $\log_5 19$ **47.** $\log_2 3$ czy $\log_5 13$

Rozwiązać równania i nierówności

48. $\log_x(1+x^2) \leqslant 1+\log_x \frac{5}{2}$

49. $(x^2+x+1)^{3x} > (x^2+x+1)^{x+1}$

50. $(x^2+1)^{2x+3} < (2x^2+3x+3)^{2x+3}$

51. $\frac{1}{1-x^2} < \frac{1}{x^2+2x}$

52. $\log_{2x}(x^2+1) \leqslant \log_{2x}(x^2+3x)$ **53.** $\sqrt{x^2+4x+4} = 10$

54. $\log_{|x|}(x+1) \leqslant 2$ **55.** $\log_x(5x-1) \leqslant \log_x(7x-2)$

56. $(x^2+1)^{x+2} \leqslant (x^2+1)^{x^2}$

57. $\log_2(x^2+2x+1) < -2$ **58.** $\log_x(1+x) < 1$

59. $\log_4 x^2 \cdot \log_x 3 \cdot \log_{27} 8 \geqslant x$ **60.** $\log_{x+x^2}(3x) \leqslant \log_{x+x^2}(x^2+2)$

61. $\log_{|x-4|}(x+1) + \log_{|x-4|}(x-1) \leqslant \log_{|x-4|} 20$

62. $\log_x 2 - \log_2 x \leqslant 1$

2. Dwumian Newtona, indukcja matematyczna.

Wykład: 7,11.10.2004 , ćwiczenia: 14.10.2004, kolokwium nr 2: 18.10.2004

Przykłady (omawiane na wykładzie)

63. Obliczyć $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

64. Obliczyć $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$.

65. Niech $a_1 = 14$, $a_2 = 128$, $a_3 = 1170$, $a_4 = 10695$, $a_5 = 97763$,

$$a_{n+5} = 10a_{n+4} - 8a_{n+3} + a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n$$

dla $n \geqslant 1$.

Niech ponadto $b_1=14$, $b_2=128$ oraz

$$b_{n+2}=\left[\frac{b_{n+1}^2}{b_n}+\frac{1}{2}\right]$$

dla $n\geqslant 1$.

Wtedy $a_n=b_n$ dla $n\leqslant 5015$ oraz $a_{5016}\neq b_{5016}$.

66. Niech

$$a_0=a_1=1, \qquad a_{n+1}=\frac{a_0^{97}+a_1^{97}+a_2^{97}+\ldots+a_n^{97}}{n} \text{ dla } n=1,2,3,\ldots$$

Wówczas liczby a_n są całkowite dla $n\leqslant 2039$, ale liczba a_{2040} nie jest całkowita.

67. Rozważamy ciąg określony następująco. Niech $a_0=6803$ oraz niech dla $n\geqslant 0$

$$a_{n+1}=f(a_n)\,,$$

gdzie $f(k)$ jest liczbą $23k+1$ podzieloną przez $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d$, przy czym a,b,c,d są największe możliwe. Innymi słowy, funkcja f mnoży liczbę przez 23, dodaje 1, a następnie usuwa z rozkładu na czynniki pierwsze czynniki jednocyfrowe. Natomiast a_n jest n-krotną iteracją funkcji f zastosowaną do liczby 6803.

Wówczas $a_n>1$ dla $n<15590459$ oraz $a_n=1$ dla $n\geqslant 15590459$.

68. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .$$

69. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n}<2^{2n-1}$.

70. Dowieść, że dla każdego $n\geqslant 6$ kwadrat (figurę geometryczną) można podzielić na n kwadratów.

71. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $100n<2^n+577$.

72. Wszystkie koty są tego samego koloru.

Zadania (do samodzielnego rozwiązania i omówienia na ćwiczeniach)

73. Ile zer końcowych ma 30! ?

Ile zer końcowych ma: **74.** 50!! **75.** 25!! ?

UWAGA: $n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)(n-6)...2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ n(n-2)(n-4)(n-6)...1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$.

76. Czy dla dowolnych n i k naturalnych prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2} \ ?$$

Jeśli nie, to zaproponuj jak ją poprawić.

77. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a,b,c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a} \ .$$

78. Dowieść, że dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + ... + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} \ .$$

79. Dowieść, że dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot ... \cdot \binom{n}{2} = \frac{n \cdot [(n-1)!]^2}{2^{n-1}} \ .$$

80. Obliczyć $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

81. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + 5\cdot 3^4 + ... + n\cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4}\cdot 3^n + \frac{1}{4} \ .$$

82. Niech (F_n) będzie ciągiem Fibonacciego, tzn. $F_1 = F_2 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Dowieść, że dla każdego n naturalnego zachodzi równość $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

83. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$(2^{2^0}+1)\cdot(2^{2^1}+1)\cdot(2^{2^2}+1)\cdot(2^{2^3}+1)\cdot(2^{2^4}+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1$.
UWAGA: $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

84. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}\ .$$

85. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $10n<2^n+25$.

86. Dowieść, że dla wszystkich n naturalnych zachodzi równość

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2\ .$$

87. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+5\cdot 2^4+\ldots+n\cdot 2^{n-1}=(n-1)\cdot 2^n+1\ .$$

88. Liczby a_n,b_n są określone wzorami $a_1=b_1=1$, $a_{n+1}=a_n+b_n$, $b_{n+1}=a_{n+1}+a_n$. Dowieść, że dla dowolnego n liczba $2a_n^2-b_n^2$ jest równa ± 1.

89. Dowieść, że dla każdego $n\geqslant 12$ mamy $p_n>3n$, gdzie p_n jest n-tą liczbą pierwsza.
Wskazówka: Dowieść, że $p_{n+2}\geqslant p_n+6$.

90. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n}<7^n$.

91. O twierdzeniu $T(n)$ wiadomo, że
(i) prawdziwe jest $T(1)$,
(ii) dla dowolnego n naturalnego $T(n)\Rightarrow T(2n)$,
(iii) dla dowolnego $n\geqslant 12$ zachodzi wynikanie $T(n)\Rightarrow T(n-11)$.
Czy można stąd wnioskować, że dla dowolnego n naturalnego zachodzi $T(n)$?

92. Dowieść, że dla dowolnej liczby pierwszej p i liczby naturalnej $k<p$ liczba $\binom{p}{k}$ dzieli się przez p.

93. Obliczyć $\sum\limits_{k=0}^{n} 16^k \binom{2n}{2k}$.

94. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{2n+3}{n} < \frac{3}{2} \cdot 4^n$.

Oszustwo **95.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110 \qquad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2+110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geqslant 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n \geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n=2$ mamy $60 < 4+110 = 114$,

dla $n=3$ mamy $90 < 8+110 = 118$,

dla $n=4$ mamy $120 < 16+110 = 126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n=6$ zachodzi nierówność $180 < 174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

96. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $500n < 3^n + 2300$.

Oszustwo **97.** $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n! \cdot n!} = \frac{2}{n!}$ po uproszczeniu przez $n!$. Jak to pogodzić z faktem, że liczba $\binom{2n}{n}$ jest całkowita?

98. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1000n<5^n+3456.$$

99. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n}<2^{2n+1}.$$

100. Dowieść, że dla każdego $n\geqslant 200$ sześcian można podzielić na n sześcianów.

101. Ile zer końcowych ma $\binom{125}{7}$?

102. O twierdzeniu $T(n)$ wiadomo, że
prawdziwe jest $T(1)$,
dla dowolnego $n\geqslant 1$ zachodzi wynikanie $T(n)\Rightarrow T(2n)$,
dla dowolnego $n\geqslant 8$ zachodzi wynikanie $T(n)\Rightarrow T(n-7)$.
Czy stąd wynika, że prawdziwe jest
a) $T(12)$,
b) $T(13)$,
c) $T(14)$,
d) $T(15)$.

103. O twierdzeniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$ oraz że dla dowolnego $n\geqslant 6$ zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że
a) prawdziwe jest $T(10)$,
b) prawdziwe jest $T(11)$,
c) prawdziwa jest implikacja $T(7)\Rightarrow T(13)$,
d) prawdziwa jest implikacja $T(3)\Rightarrow T(1)$,
e) prawdziwa jest implikacja $T(1)\Rightarrow T(3)$.

3. Liczby wymierne i niewymierne.

Wykład: 14,18.10.2004 , ćwiczenia: 21.10.2004, kolokwium nr 3: 25.10.2004

Przykłady (omawiane na wykładzie)

104. Czy liczba 0,9999999999999999999999999999... jest wymierna, czy niewymierna?

105. Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.

106. Liczba $\sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.

107. Liczba $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ jest niewymierna.

108. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n liczba $\sqrt[m]{n}$ jest całkowita lub niewymierna.

109. Liczba $\log_3 10$ jest niewymierna.

110. Liczba $\log_3 5$ jest niewymierna.

111. Liczba $\log_{12} 6$ jest niewymierna.

112. Liczba $\log_6 2+\log_{36} 9$ jest wymierna.

113. Liczba $\log_3 \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Zadania (do samodzielnego rozwiązania i omówienia na ćwiczeniach)

114. Przedstawić liczbę 0,123(45) w postaci ułamka zwykłego.

115. Przedstawić liczbę 0,1(270) w postaci ułamka zwykłego.

Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

116. $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3,374(9)}$ **117.** $(0,2(9)+1,(09))\cdot 12,(2)$

118. Obliczyć wartość wyrażenia $(0,(037))^{0,(3)}$ podając wynik w postaci ułamka zwykłego.

119. Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

120. Dowieść, że liczba $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ jest niewymierna.

121. Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

122. Dowieść, że liczba $\sqrt{\log_4 9}$ jest niewymierna.

123. Dowieść, że liczba $\log_6 10$ jest niewymierna.

124. Rozstrzygnąć czy liczba $\log_2 3+\log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

125. Dowieść, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

126. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ jest niewymierna.

OSZUSTWO **127.**

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w+\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2+2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

128. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

129. Dla jakich liczb naturalnych m i n większych od 1 liczba
$$\frac{\log_m(mn)\cdot\log_n(mn)}{\log_m(mn)+\log_n(mn)}$$
jest wymierna, a dla jakich niewymierna?

130. Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ jest wymierna, czy niewymierna?

131. Czy liczba
$$2^{\log_3 5}-5^{\log_3 2}$$
jest wymierna, czy niewymierna?

132. Dowieść, że liczba $\log_8 100$ jest niewymierna.

133. Czy dla dowolnych liczb naturalnych m i n większych od 1 liczba $\log_m n$ jest całkowita lub niewymierna?

134. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a,b,c są wymierne?

135. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

136. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a,b,c,d są wymierne?

137. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.
Wskazówka: $(a+b)^3=a^3+b^3+(a+b)\cdot$coś.

138. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+,-,\cdot,:$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

139. Czy liczba 0,1123583145943... jest wymierna, czy niewymierna? Każda cyfra jest sumą dwóch poprzednich modulo 10.

TEST: 20 przykładów.

W ciągu 120 minut rozwiąż następujące zadania. Zapisz tylko odpowiedzi. Potem spytaj mądrych ludzi (np. kolegów lub Pana od ćwiczeń), czy są to poprawne odpowiedzi. Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być zaliczone. 15 poprawnych odpowiedzi to całkiem niezły wynik. Rezultat testu niech pozostanie Twoją słodką tajemnicą.

Dać przykład takiej liczby rzeczywistej x, że

140. $0<x<1$ oraz x jest niewymierna,

141. $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,

142. x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,

143. x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,

144. $(x+1)^2$ jest niewymierna,

145. x jest niewymierna, ale $x+\frac{1}{x}$ jest wymierna,

146. x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,

147. 2^x+3^x jest liczbą niewymierną,

148. 2^x+3^x jest liczbą wymierną,

149. $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

150. $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

151. $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

152. $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

153. $2^x+\log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,

154. $2^x+\log_2 x$ jest liczbą niewymierną,

155. $x+\log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

156. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

157. $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,

158. $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,

159. $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.