5. Całki niewłaściwe - obliczanie, kryterium porównawcze.

Kolokwium nr 7: 14.04.2005 (czwartek)

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć te, które są zbieżne

804. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ **805.** $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **806.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **807.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{x-1}{x^2-1}dx$ **808.** $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$

809. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}}$ **810.** $\int\limits_0^\infty \sin x dx$ **811.** $\int\limits_1^\infty x^{1/x}dx$ **812.** $\int\limits_{-\infty}^\infty e^x dx$

813. $\int\limits_0^1 e^{1/x}dx$ **814.** $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^3}dx$ **815.** $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

816. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$ **817.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\mathrm{arctg}x}$ **818.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x-\sin^4\sqrt{x+28}}$ **819.** $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^2-x}$

820. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}-\sqrt{x}}$ **821.** $\int\limits_0^1 \ln^2 x dx$ **822.** $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ **823.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$

824. $\int\limits_0^1 \frac{1-x}{x}dx$ **825.** $\int\limits_2^3 \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}dx$ **826.** $\int\limits_0^\infty \frac{1+\sqrt{x+|\ln x|}}{x}dx$

827. $\int\limits_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ **828.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$ **829.** $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$ **830.** $\int\limits_1^\infty \frac{x^2+1}{x^3+1}dx$

831. $\int\limits_0^\infty x^3\sin x^4 dx$ **832.** $\int\limits_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ **833.** $\int\limits_{-1}^\infty \frac{x^2-9x-10}{x^3+1}dx$

834. $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}x}{x^2+\mathrm{arctg}x}dx$ **835.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+\sin^2 x}$ **836.** $\int\limits_1^\infty e^{-1/x}dx$

6. Całki niewłaściwe - zbieżność bezwzględna, osobliwości wewnątrz przedziału całkowania.

Kolokwium nr 8: 21.04.2005 (czwartek)

Oszustwo **837.** (funkcja ciągła nieujemna mająca całkę mniejszą od zera):

Niech

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

Bez trudu można sprawdzić, że f jest ciągła w zerze, a zatem obliczenie całki $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ nie powinno nastręczać trudności. Ponieważ

$$f(x)=\frac{1}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})}$$

poza pojedynczym punktem $x=0$, po wykonaniu podstawienia $t=e^{1/x}$ otrzymujemy

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})}=-\int_{1/e}^{e}\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\mathrm{arctg}t\Bigg|_{1/e}^{e}=-\mathrm{arctg}e+\mathrm{arctg}\frac{1}{e}=\frac{\pi}{2}-2\mathrm{arctg}e<0$$

Wyjaśnić, na czym polega oszustwo i obliczyć prawdziwą wartość całki $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartość tych, które są zbieżne

838. $\int_{-2}^{1}\frac{e^{1/x}}{x^2(e^{2/x}+e^{-2/x}+2)}dx$ **839.** $\int_{-1}^{1}\ln|x|dx$

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

840. $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x^4}{x^3}dx$ **841.** $\int_{0}^{1}\sin\frac{1}{x}dx$ **842.** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\mathrm{arctg}\, x}$ **843.** $\int_{0}^{\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}dx$

844. $\int_{0}^{4}\frac{x^2-\pi x}{\sin x}dx$ **845.** $\int_{0}^{7}\frac{x^2-2\pi x}{\sin x}dx$ **846.** $\int_{1}^{3}\frac{\mathrm{arctg} x^{2005\mathrm{arctg}\, x^{2005}}}{x-2}dx$

847. $\int_{0}^{\infty}\frac{\sqrt{x+1}\mathrm{arctg} e^x}{x^2+\sqrt{x}+\mathrm{arctg} x}dx$ **848.** $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}}dx$

849. $\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ **850.** $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ **851.** $\int_{-2}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}$

7. Całki niewłaściwe - kryterium całkowe zbieżności szeregów liczbowych;

zestawienie własności całek niewłaściwych w porównaniu z własnościami szeregów - pytania powtórzeniowe.

Kolokwium nr 9: 28.04.2005 (czwartek)

Użyć kryterium całkowego do rozstrzygnięcia zbieżności następujących szeregów

852. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[7]{n}}$ **853.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **854.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

855. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^a n}$ w zależności od $a>0$

856. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ **857.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ **858.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

859. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=\frac{1}{n}$, ale całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

860. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=\frac{1}{n^2}$, ale całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

861. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=n$, ale całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

862. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=0$, ale całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

863. Dać przykład takiej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że dla $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $f(n)=e^n$, ale całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna.

Co możemy powiedzieć o zbieżności (*zbieżne, rozbieżne, nie wiadomo*) szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ lub całek $\int\limits_0^1 f(x)dx$ i $\int\limits_1^{\infty} g(x)dx$, gdzie $f\in C(0,1]$ i $g\in C[1,\infty)$, jeśli wiadomo, że

864. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **865.** $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ **866.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

867. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ **868.** $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$ **869.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

870. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ **871.** $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ **872.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

873. Ciąg (a_n) nie jest zbieżny do 0.

874. $g(x)$ nie dąży do 0 przy $x \to \infty$.

875. $f(x)$ nie dąży do 0 przy $x \to 0$.

876. Ciąg (a_n) jest ograniczony.

877. Funkcja g jest ograniczona.

878. Funkcja f jest ograniczona.

879. Ciąg (a_n) nie jest ograniczony.

880. Funkcja g nie jest ograniczona.

881. Funkcja f nie jest ograniczona.

882. Szereg $\sum\limits_{n=2005}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

883. Całka $\int\limits_{2005}^{\infty} g(x)dx$ jest zbieżna.

884. Całka $\int\limits_{0}^{1/2005} f(x)dx$ jest zbieżna.

885. Szereg $\sum\limits_{n=2005}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

886. Całka $\int\limits_{2005}^{\infty} g(x)dx$ jest rozbieżna.

887. Całka $\int\limits_{0}^{1/2005} f(x)dx$ jest rozbieżna.

888. $a_n = n^p$ - dać odpowiedź w zależności od p.

889. $g(x) = x^p$ - dać odpowiedź w zależności od p.

890. $f(x) = x^p$ - dać odpowiedź w zależności od p.

891. $a_n = p^n$ - dać odpowiedź w zależności od p.

892. $g(x) = p^x$ - dać odpowiedź w zależności od $p > 0$.

893. $f(x) = p^x$ - dać odpowiedź w zależności od $p > 0$.