10. Szeregi Fouriera.

Ćwiczenia: 19.05.2005

Kolokwium nr 12: 2.06.2005 (czwartek) - obowiązuje materiał od początku semestru

Szeregiem Fouriera funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o okresie 2π, całkowalnej na przedziale długości 2π, nazywamy szereg

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ ,$$

gdzie

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_A^{A+2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_A^{A+2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_A^{A+2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Powyższe całki nie zależą od wyboru dolnej granicy przedziału całkowania.

Jeżeli ponadto funkcja f jest przedziałami monotoniczna oraz dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x)=\frac{f(x-)+f(x+)}{2}\ ,$$

to f jest (punktowo) sumą swojego szeregu Fouriera.

Równość Parsevala:

$$\int\limits_A^{A+2\pi} f(x)^2\,dx=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

Znaleźć szereg Fouriera funkcji

951. $f(x)=x$ dla $x\in(-\pi,\pi)$ **952.** $f(x)=|x|$ dla $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

953. $f(x)=x^2$ dla $x\in(-\pi,\pi)$ **954.** $f(x)=x^2$ dla $x\in(0,2\pi)$

955. $f(x)=x^2$ dla $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ **956.** $f(x)=\left[\frac{x}{\pi}\right]$ dla $x\in(0,2\pi)$

957. $f(x)=e^x$ dla $x\in(0,2\pi)$ **958.** $f(x)=e^x$ dla $x\in(-\pi,\pi)$

959. $f(x)=x$ dla $x\in(0,2\pi)$ **960.** $f(x)=|\sin x|$ dla $x\in(0,2\pi)$

961. $f(x)=e^{|x|}$ dla $x\in(-\pi,\pi)$ **962.** $f(x)=\sin\frac{3}{2}x$ dla $x\in(0,2\pi)$

963. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{dla} \quad x\in(0,\pi)\\ \cos x & \text{dla} \quad x\in(\pi,2\pi)\end{cases}$

964. $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{dla} \quad x\in(0,\pi)\\ 0 & \text{dla} \quad x\in(\pi,2\pi)\end{cases}$

965. $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{dla} \quad 0<x<\pi/2\\ 1 & \text{dla} \quad \pi/2<x<2\pi\end{cases}$

966. Obliczyć $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ stosując wzór Parsevala do $f(x)=e^x$ na $(0,2\pi)$ oraz wstawiając $x=0$ do szeregu Fouriera tej funkcji. Porównać obydwa wyniki.

967. Obliczyć $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-2}$ wstawiając $x=0$ do szeregu Fouriera funkcji $f(x)=\cos(x\sqrt{2})$ na $(0,2\pi)$.

968. Obliczyć $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ używając $f(x)=x(\pi-|x|)$ na $(-\pi,\pi)$.

969. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie π, to w jej szeregu Fouriera $a_n=b_n=0$ dla n nieparzystych.

970. Dowieść, że jeśli f jest funkcją okresową o okresie $\frac{2\pi}{3}$, to w jej szeregu Fouriera $a_n=b_n=0$ dla n niepodzielnych przez 3.

Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f} |f(x)|$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:

Ciag funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do f, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, to f jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, a ciąg pochodnych (f_n') jest zbieżny jednostajnie do funkcji g, to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.

Szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak, jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągła.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągłe pochodne, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

971. Dowieść, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągła.

972. Dowieść, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

973. Dowieść, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2005^n}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

974. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągła okresową o okresie 2π, mającą ciągłe pochodne rzędu pierwszego, drugiego i trzeciego.

Dowieść, ze wówczas istnieje taka stała C, że współczynniki szeregu Fouriera funkcji f spełniają nierówności

$$a_n \leqslant \frac{C}{n^3} \quad \text{oraz} \quad a_n \leqslant \frac{C}{n^3}$$

dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich n.

975. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \sin^2 x \cos 5x \cos 7x$$