

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór **wszystkich** wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (p^2 - 1)^n, (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^3 - 1)^n}{\sqrt{n}}, [0, \sqrt[3]{2})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^4 - 1)^n}{n}, (-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^6 - 1)^n}{n^2}, [-\sqrt[6]{2}, \sqrt[6]{2}]$

2. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + 3k^2} = \frac{\ln 13}{6}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + 3k^2} = \frac{\ln 2}{3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + 2k^2} = \frac{\ln 3}{2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + 2k^2} = \frac{\ln 3}{4}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{x^7 + x^3} dx, (2, 3)$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{x^6 + x^2} dx, (1, 5/2)$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{x^9 + x^5} dx, \emptyset$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{x^8 + x^4} dx, (3, 7/2)$

4. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{37} \cdot e^{x^{10}}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(107)}(0) = \frac{107!}{7!}$

b) $f^{(117)}(0) = \frac{117!}{8!}$

c) $f^{(127)}(0) = \frac{127!}{9!}$

d) $f^{(137)}(0) = \frac{137!}{10!}$

5. Podaj w możliwie prostej postaci takie wyrażenia A , B , C , D , aby dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodziła podana równość.

a) $\int_0^3 \int_{x\sqrt{x}}^{\sqrt{3}\cdot x} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = 0$ $B = \pi/3$ $C = 0$ $D = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos \varphi}$

b) $\int_0^3 \int_0^{x\sqrt{x}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = 0$ $B = \pi/3$ $C = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos \varphi}$ $D = 3/\cos \varphi$

c) $\int_0^1 \int_{x\sqrt{x}}^x f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = 0$ $B = \pi/4$ $C = 0$ $D = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos \varphi}$

d) $\int_0^1 \int_0^{x\sqrt{x}} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_C^D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$

$A = 0$ $B = \pi/4$ $C = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos \varphi}$ $D = 1/\cos \varphi$

6. Podaj w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z \cdot \bar{z} = 65$.

a) $z = 1 + ai, \quad a = 8$

b) $z = 4 + ai, \quad a = 7$

c) $z = 7 + ai, \quad a = 4$

d) $z = 8 + ai, \quad a = 1$

7. Dla podanych liczb a i b wypisz w kolejności niemalejącej wartości własne (z uwzględnieniem krotności) macierzy $\begin{pmatrix} 2 & a & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & b \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

a) $a = 3, \quad b = 3, \quad \mathbf{0, 2, 5, 7}$

b) $a = 3, \quad b = 1, \quad \mathbf{0, 3, 5, 6}$

c) $a = 1, \quad b = 3, \quad \mathbf{1, 2, 4, 7}$

d) $a = 1, \quad b = 1, \quad \mathbf{1, 3, 4, 6}$

8. Niech $A = (0, 0)$ i $B = (1, 3)$. Dla danego punktu C podaj pole trójkąta ABC .

a) $C = (3, 4), \quad P_{ABC} = \mathbf{5/2}$

b) $C = (0, 5), \quad P_{ABC} = \mathbf{5/2}$

c) $C = (5, 0), \quad P_{ABC} = \mathbf{15/2}$

d) $C = (4, 3), \quad P_{ABC} = \mathbf{9/2}$

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 18^k i niezawierających liczby 18. Wówczas

a) $C(6) = \mathbf{85}$

b) $C(3) = \mathbf{22}$

c) $C(4) = \mathbf{39}$

d) $C(5) = \mathbf{60}$

10. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(-2, \infty)$, a działanie grupowe "o" jest określone wzorem $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g = 0, \quad g^{-1} = -\mathbf{3/2}$

b) $g = 1, \quad g^{-1} = -\mathbf{5/3}$

c) $g = 2, \quad g^{-1} = -\mathbf{7/4}$

d) $g = 3, \quad g^{-1} = -\mathbf{9/5}$

11. W urnie znajduje się 10 kul z kolejnymi liczbami od 1 do 10. Losujemy z urny dwie kule (losowanie bez zwracania). Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma liczb napisanych na wylosowanych kulach jest równa n . Podaj w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(11) = \mathbf{1/9}$

b) $P(15) = \mathbf{1/15}$

c) $P(16) = \mathbf{2/45}$

d) $P(19) = \mathbf{1/45}$

12. Zdarzenia losowe A, B, C i D są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ i $P(C \cap D)$ podaj $P(A \cap D)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B, C i D spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 2/3, \quad P(C \cap D) = 3/4,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{9/16}$

b) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/3, \quad P(C \cap D) = 1/4,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{3/8}$

c) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 2/3, \quad P(C \cap D) = 1/4,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{3/16}$

d) $P(A \cap B) = 1/2, \quad P(B \cap C) = 1/3, \quad P(C \cap D) = 3/4,$
 $P(A \cap D) = \mathbf{NIE}$