202. Uporządkuj następujące liczby w kolejności rosnącej:
$12345678901\cdot 12345678911$, $12345678903\cdot 12345678909$, $12345678905\cdot 12345678907$,
$12345678902\cdot 12345678910$, $12345678900\cdot 12345678912$, $12345678904\cdot 12345678908$.

Rozwiązanie:

Podane liczby są iloczynami postaci

$$(12345678906-k)\cdot(12345678906+k)\,,$$

gdzie $k=1,2,3,4,5,6$. Ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$(12345678906-k)\cdot(12345678906+k)=12345678906^2-k^2\,,$$

skąd wynika, że iloczyn jest tym większy, im mniejsza jest liczba k, czyli im większy jest pierwszy czynnik.

204. Wyznacz wszystkie (z dokładnością do przystawania) trójkąty prostokątne o bokach długości całkowitej i jednej z przyprostokątnych długości 15.

Rozwiązanie:

Oznaczając długości przyprostokątnych trójkąta przez $a=15$ i b, a długość przeciwprostokątnej przez c, otrzymujemy na mocy twierdzenia Pitagorasa $15^2+b^2=c^2$, czyli

$$225=c^2-b^2=(c-b)\cdot(c+b)\,.$$

Liczba 225 ma następujące cztery rozkłady na iloczyn dwóch liczb całkowitych dodatnich, gdzie pierwszy czynnik jest mniejszy od drugiego: $1\cdot 225$, $3\cdot 75$, $5\cdot 45$, $9\cdot 25$. Rozkłady te prowadzą odpowiednio do rozwiązań

$$b=112,\ c=113,\qquad b=36,\ c=39,\qquad b=20,\ c=25,\qquad b=8,\ c=17\,.$$

206. Która liczba jest większa:

$$\sqrt{77}-\sqrt{76}\quad\text{czy}\quad\sqrt{79}-\sqrt{78}\ ?$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b},\qquad a+b\neq 0,$$

przepisujemy podane liczby jako

$$\frac{1}{\sqrt{77}+\sqrt{76}}\quad\text{oraz}\quad\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{78}}\,.$$

Ponieważ pierwsza liczba ma mniejszy mianownik, jest ona większa.

208. Rozłóż na iloczyn czynników pierwszych liczbę 3^8-1.

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów prowadzi do

$$3^8-1=\left(3^4-1\right)\cdot\left(3^4+1\right)=80\cdot 82=\left(2^4\cdot 5\right)\cdot(2\cdot 41)=2^5\cdot 5\cdot 41\,.$$

220. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right|\leqslant|x-y|\ .$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right|=\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right|\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\,.$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\leqslant 1\,,$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y|\leqslant\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\,.$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\,.$$

222. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej nieparzystej n liczba n^4 daje przy dzieleniu przez 16 resztę 1.

Rozwiązanie:

Korzystając dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$n^4-1=\left(n^2+1\right)\cdot(n+1)\cdot(n-1)\,.$$

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to w powyższym iloczynie wszystkie trzy czynniki są parzyste. Ponadto dwa ostatnie czynniki są kolejnymi liczbami parzystymi, a zatem jedna z nich jest podzielna przez 4. Podsumowując, iloczyn zawiera trzy czynniki parzyste, w tym jeden czynnik podzielny przez 4. Zatem iloczyn ten jest podzielny przez 16.

224. Zapewne wiesz, że $3^2+4^2=5^2$. Możesz nie wiedzieć, że także $3^3+4^3+5^3=6^3$. Udowodnij, że dla czwartych potęg podobna równość nie zachodzi, albowiem dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $n^4+(n+1)^4+(n+2)^4+(n+3)^4$ nie jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Spośród czterech kolejnych liczb n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ dwie są parzyste, a dwie nieparzyste. Czwarta potęga liczby parzystej jest podzielna przez 16, a czwarta potęga liczby nieparzystej daje przy dzieleniu przez 16 resztę 1. Zatem liczba

$$n^4+(n+1)^4+(n+2)^4+(n+3)^4$$

daje przy dzieleniu przez 16 resztę 2. Nie jest więc ona czwartą potęgą liczby całkowitej, gdyż czwarte potęgi mogą dawać przy dzieleniu przez 16 tylko reszty 0 i 1.

226. Która liczba jest większa: $\sqrt[4]{77}-\sqrt[4]{76}$ czy $\sqrt[4]{79}-\sqrt[4]{78}$?

Rozwiązanie:

Dwukrotne zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów prowadzi do równości

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)\cdot(a+b)} \tag{1}$$

przy założeniu $a+b\neq 0$. Możemy więc przepisać podane w zadaniu liczby w postaci

$$\frac{1}{\left(\sqrt{77}+\sqrt{76}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{77}+\sqrt[4]{76}\right)} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{\left(\sqrt{79}+\sqrt{78}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{79}+\sqrt[4]{78}\right)}\,.$$

Ponieważ pierwsza liczba ma mniejszy mianownik, jest ona większa.

228. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[4]{y^4+1}\right|\leqslant|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

We wzorze (1) z poprzedniego zadania przyjmijmy $a=\sqrt[4]{x^4+1}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^4+1}$. Zauważmy, że $a+b>0$ i przekształćmy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\left|\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[4]{y^4+1}\right|=\left|\frac{(x^4+1)-(y^4+1)}{\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^4-y^4|}{\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)}=\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4}<\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}}<1\,.$$

Podobnie, wykorzystując równość $x^2=\sqrt{x^4}$ otrzymujemy:

$$x^2+y^2=\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}<\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\,,$$

skąd

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}}<1\,.$$

Połączenie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}}\leqslant|x-y|\cdot1\cdot1=|x-y|\,.$$

240. Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *milutką,* jeżeli da się ją przedstawić w postaci sumy (dwóch lub więcej) trzydziestych drugich potęg liczb całkowitych dodatnich, w której to sumie występuje dokładnie jeden składnik nieparzysty i co najmniej jeden składnik parzysty. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, której trzydziesta druga potęga jest *milutka.*

Rozwiązanie:

Niech n będzie taką liczbą naturalną, że liczba n^{32} jest *milutka.* Wówczas dla pewnej nieparzystej liczby naturalnej $k<n$ liczba $n^{32}-k^{32}$ jest sumą trzydziestych drugich potęg liczb parzystych, a to jest równoważne podzielności liczby $n^{32}-k^{32}$ przez 2^{32}. Wynika stąd w szczególności, że liczba n jest nieparzysta.

Korzystając pięciokrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$n^{32}-k^{32}=(n-k)\cdot(n+k)\cdot\left(n^2+k^2\right)\cdot\left(n^4+k^4\right)\cdot\left(n^8+k^8\right)\cdot\left(n^{16}+k^{16}\right)\,.$$

W iloczynie po prawej stronie jest 6 czynników parzystych, przy czym podzielny przez 4 jest dokładnie jeden czynnik. I w dodatku może to być tylko czynnik pierwszy lub drugi, bo suma dwóch kwadratów liczb nieparzystych nie jest podzielna przez 4. Stąd wynika, że liczba n spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba nieparzysta dodatnia $k<n$, że jedna z liczb $n-k$, $n+k$ jest podzielna przez 2^{27}. Zatem $2n>n+k\geqslant2^{27}$ i najmniejszą liczbą spełniającą warunki zadania jest $n=2^{26}+1$, gdyż możemy przyjąć $k=2^{26}-1$.

Odpowiedź: Najmniejsza liczba, której 32-ga potęga jest *milutka,* to $2^{26}+1=67108865$.

242. Znajdź dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby 123^3-1.

Rozwiązanie:

Ze wzoru na różnicę sześcianów wynika, że dana w zadaniu liczba jest podzielna przez $123-1=122=2\cdot 61$, jej dzielnikiem pierwszym jest więc 61.

244. Znajdź dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby 212^5+1.

Rozwiązanie:

Ze wzoru na sumę piątych potęg otrzymujemy podzielność danej liczby przez

$$212+1=213=3\cdot 71\,,$$

a w konsekwencji przez 71.

246. Znajdź dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $77^{34}-2^{34}$.

Rozwiązanie:

Ze wzorów na różnicę potęg o jednakowych parzystych wykładnikach otrzymujemy podzielność danej liczby przez $77-2=75=3\cdot 5^2$ i $77+2=79$.

Odpowiedź: Dana liczba jest podzielna przez 79.

248. Znajdź dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $3^{15}-1$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru na różnicę sześcianów wynika, że liczba $3^{15}-1=\left(3^5\right)^3-1^3$ jest podzielna przez $3^5-1=242=2\cdot 11^2$, a ze wzoru na różnicę piątych potęg otrzymujemy podzielność liczby $3^{15}-1=\left(3^3\right)^5-1^5$ przez $3^3-1=2\cdot 13$.

Odpowiedź: Dana liczba jest podzielna przez 11 i 13.

260. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $36^{17}-5^{17}$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru na różnicę potęg o jednakowych wykładnikach wynika, że dana liczba jest podzielna przez

$$36-5=31\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **31.**

262. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $6^{17}+5^{17}$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru na sumę potęg o jednakowych nieparzystych wykładnikach wynika, że dana liczba jest podzielna przez

$$6+5=11\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **11.**

264. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{33}-2^{22}$.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$27^{11}-4^{11}\,.$$

Wówczas ze wzoru na różnicę potęg o jednakowych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$27-4=23\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **23.**

266. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $6^{22}+5^{22}$.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$36^{11}+25^{11}\,.$$

Wówczas ze wzoru na sumę potęg o jednakowych nieparzystych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$36+25=61\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **61.**

268. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $17^{26}-2^{26}$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru na różnicę potęg o jednakowych parzystych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez sumę podstaw tych potęg, czyli

$$17+2=19\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **19.**

280. Wskaż dzielnik pierwszy liczby $2^{21}-1$ mniejszy od 100.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$8^{7}-1^{7}\,.$$

Wówczas ze wzoru na różnicę potęg o jednakowych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$8-1=7\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **7.**

282. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $3^{21}-1$ mniejszy od 100.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$27^7-1^7\,.$$

Wówczas ze wzoru na różnicę potęg o jednakowych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$27-1=26=2\cdot 13\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **13.**

284. Wskaż dzielnik pierwszy liczby $3^{51}-2^{51}$ mniejszy od 100.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$27^{17}-8^{17}\,.$$

Wówczas ze wzoru na różnicę potęg o jednakowych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$27-8=19\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **19.**

286. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $3^{51}+1$ mniejszy od 100.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$27^{17}+1^{17}\,.$$

Wówczas ze wzoru na sumę potęg o jednakowych nieparzystych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$27+1=28=2^2\cdot 7\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **7.**

288. Wskaż dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $2^{35}+1$.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$32^7+1^7\,.$$

Wówczas ze wzoru na sumę potęg o jednakowych nieparzystych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$32+1=33=3\cdot 11\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **11.**

Daną liczbę można też zapisać w postaci

$$128^5+1^5\,.$$

Wówczas ze wzoru na sumę potęg o jednakowych nieparzystych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$128+1=129=3\cdot 43\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **43.**

400. Wskaż trzycyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{77}-1$.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$128^{11}-1^{11}\,.$$

Wówczas ze wzoru na różnicę potęg o jednakowych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$128-1=127\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **127.**

402. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{42}-3^{21}$.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$64^7-27^7\,.$$

Wówczas ze wzoru na różnicę potęg o jednakowych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$64-27=37\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **37.**

404. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{808}-1$.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$\left(3^8\right)^{101}-1^{101}\,.$$

Wówczas ze wzoru na różnicę potęg o jednakowych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$3^8-1=\left(3^4+1\right)\cdot\left(3^2+1\right)\cdot(3+1)\cdot(3-1)=82\cdot 10\cdot 4\cdot 2=(2\cdot 41)\cdot(2\cdot 5)\cdot 4\cdot 2\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **41.**

406. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{98}-1$.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$128^{14}-1^{14}\,.$$

Ze wzoru na różnicę potęg o jednakowych parzystych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez sumę podstaw tych potęg, czyli

$$128+1=129=3\cdot 43\,,$$

jej dzielnikiem pierwszym jest więc **43.**

408. Wskaż dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $3^{136}-2^{136}$.

Rozwiązanie:

Daną liczbę można zapisać w postaci

$$\left(3^8\right)^{17}-\left(2^8\right)^{17}.$$

Wówczas ze wzoru na różnicę potęg o jednakowych wykładnikach wynika, że liczba ta jest podzielna przez

$$3^8-2^8=\left(3^4+2^4\right)\cdot\left(3^2+2^2\right)\cdot(3+2)\cdot(3-2)=97\cdot 13\cdot 5\cdot 1\,,$$

jej dzielnikami pierwszymi są więc **13** i **97.**

420. Która liczba jest większa:

$$\sqrt[3]{77}-\sqrt[3]{76}\quad \text{czy}\quad \sqrt[3]{79}-\sqrt[3]{78}\ ?$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

przepisujemy podane liczby jako

$$\frac{1}{\sqrt[3]{77^2}+\sqrt[3]{77\cdot 76}+\sqrt[3]{76^2}}\quad \text{oraz}\quad \frac{1}{\sqrt[3]{79^2}+\sqrt[3]{79\cdot 78}+\sqrt[3]{78^2}}\,.$$

Ponieważ pierwsza liczba ma mniejszy mianownik, jest ona większa.

422. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt[6]{x^6+1}-\sqrt[6]{y^6+1}\right|\leqslant |x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzory na różnicę kwadratów i sześcianów otrzymujemy nieco prostszy od standardowego wzór na różnicę szóstych potęg:

$$a^6-b^6=\left(a^3+b^3\right)\cdot\left(a^3-b^3\right)=\left(a^3+b^3\right)\cdot(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)\,.$$

Stosując ten wzór przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności do postaci

$$\left|\frac{x^6-y^6}{\left(\sqrt{x^6+1}+\sqrt{y^6+1}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{\left(x^6+1\right)^2}+\sqrt[6]{\left(x^6+1\right)\cdot\left(y^6+1\right)}+\sqrt[6]{\left(y^6+1\right)^2}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot\left|x^3+y^3\right|\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)}{\left(\sqrt{x^6+1}+\sqrt{y^6+1}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{\left(x^6+1\right)^2}+\sqrt[6]{\left(x^6+1\right)\cdot\left(y^6+1\right)}+\sqrt[6]{\left(y^6+1\right)^2}\right)}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|^3=\sqrt{x^6}$ otrzymujemy

$$\left|x^3+y^3\right|\leqslant|x|^3+|y|^3=\sqrt{x^6}+\sqrt{y^6}<\sqrt{x^6+1}+\sqrt{y^6+1}\,.$$

Podobnie z równości $|x|=\sqrt[6]{x^6}$ otrzymujemy

$$x^2+xy+y^2\leqslant x^2+|xy|+y^2=$$

$$=\sqrt[6]{x^{12}}+\sqrt[6]{x^6y^6}+\sqrt[6]{y^{12}}<\sqrt[6]{\left(x^6+1\right)^2}+\sqrt[6]{\left(x^6+1\right)\cdot\left(y^6+1\right)}+\sqrt[6]{\left(y^6+1\right)^2}\,.$$

Połączenie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania.

424. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}<\sqrt{n^2+n}-n<\frac{1}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{n^2+n}=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\left(n^2+n\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{n^2+n}}=\frac{1/4}{n\cdot\left(1+\frac{1}{2n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}\,,$$

skąd wobec nierówności

$$1+\frac{1}{2n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}>2$$

dostajemy tezę zadania.

426. Wyznacz wszystkie takie liczby całkowite $n>1$, że liczba n^2-1 jest pierwsza.

Rozwiązanie:

Z rozkładu $n^2-1=(n-1)\cdot(n+1)$ wynika, że liczba n^2-1 może być pierwsza tylko w przypadku, gdy $n-1=1$, czyli $n=2$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że wówczas otrzymujemy liczbę pierwszą 3.