

1. Postęp arytmetyczny $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ o wyrazach rzeczywistych jest rosnący, a ponadto ma następującą własność: *Wyrazy drugi, szósty i ósmy tworzą (w tej właśnie kolejności) trójwyrazowy postęp geometryczny.* Dla podanych liczb i, j podaj taką liczbę całkowitą dodatnią k , aby wyrazy a_i, a_j, a_k tworzyły (w tej właśnie kolejności) trójwyrazowy postęp geometryczny.

a) $i = 6, \quad j = 8, \quad k = \dots\dots\dots$ b) $i = 6, \quad j = 12, \quad k = \dots\dots\dots$

c) $i = 6, \quad j = 14, \quad k = \dots\dots\dots$ d) $i = 8, \quad j = 12, \quad k = \dots\dots\dots$

2. Dla podanych liczb a, b podaj taką liczbę c , że $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2$.

a) $a = 2, \quad b = -10, \quad c = \dots\dots\dots$ b) $a = 2, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = \dots\dots\dots$

c) $a = 2, \quad b = -3, \quad c = \dots\dots\dots$ d) $a = 2, \quad b = 2, \quad c = \dots\dots\dots$

3. Dany jest dziesięciokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{10}$. Dla podanych i, j podaj zbiór **wszystkich** takich liczb k , że trójkąt $A_iA_jA_k$ jest równoramienny.

a) $i = 1, \quad j = 3, \quad k \in \{ \dots\dots\dots \}$

b) $i = 1, \quad j = 2, \quad k \in \{ \dots\dots\dots \}$

c) $i = 1, \quad j = 5, \quad k \in \{ \dots\dots\dots \}$

d) $i = 1, \quad j = 4, \quad k \in \{ \dots\dots\dots \}$

4. Dla podanej liczby D podaj **największą** liczbę naturalną d , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Dla każdych liczb całkowitych a, b o iloczynie ab podzielnym przez D , co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez d .

a) $D = 128, \quad d = \dots\dots\dots$ b) $D = 16, \quad d = \dots\dots\dots$

c) $D = 32, \quad d = \dots\dots\dots$ d) $D = 64, \quad d = \dots\dots\dots$

5. To samo polecenie, co w zadaniu poprzednim.

a) $D = 24, \quad d = \dots\dots\dots$ b) $D = 2^5 \cdot 3^3, \quad d = \dots\dots\dots$

c) $D = 40, \quad d = \dots\dots\dots$ d) $D = 3^5 \cdot 5^3, \quad d = \dots\dots\dots$

6. Podaj liczbę rzeczywistą x , dla której zachodzi podana równość.

a) $2^x + 4^x = 132$ dla $x = \dots\dots\dots$ b) $2^x + 8^x = 130$ dla $x = \dots\dots\dots$

c) $3^x + 9^x = 30$ dla $x = \dots\dots\dots$ d) $2^x + 4^x = 12$ dla $x = \dots\dots\dots$

7. Postęp geometryczny $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ o wyrazach rzeczywistych dodatnich jest rosnący, a ponadto ma następującą własność: *Wyrazy pierwszy, szósty i dziesiąty tworzą (w tej właśnie kolejności) trójwyrazowy postęp arytmetyczny.* Dla podanego m podaj takie liczby całkowite dodatnie n i k , aby wyrazy a_m, a_n i a_k tworzyły (w tej właśnie kolejności) rosnący trójwyrazowy postęp arytmetyczny.

a) $m = 2, \quad n = \dots, \quad k = \dots$ b) $m = 6, \quad n = \dots, \quad k = \dots$

c) $m = 60, \quad n = \dots, \quad k = \dots$ d) $m = 10, \quad n = \dots, \quad k = \dots$

8. Dla podanych A i B podaj liczbę rzeczywistą x spełniającą równanie $A^{B^x} = B^{A^x}$.

a) $A = 3, \quad B = 27, \quad x = \dots$ b) $A = 4, \quad B = 16, \quad x = \dots$

c) $A = 2, \quad B = 16, \quad x = \dots$ d) $A = 2, \quad B = 4, \quad x = \dots$

9. To samo polecenie, co w zadaniu poprzednim.

a) $A = \sqrt{2}, \quad B = 256, \quad x = \dots$ b) $A = \sqrt{2}, \quad B = 4, \quad x = \dots$

c) $A = \sqrt{2}, \quad B = 2, \quad x = \dots$ d) $A = \sqrt{2}, \quad B = 16, \quad x = \dots$

10. Dla podanych a i b podaj liczbę rzeczywistą $x > 1$ spełniającą równanie $\log_a x + \log_b x = \log_a x \cdot \log_b x$.

a) $a = 7, \quad b = 11, \quad x = \dots$ b) $a = 5, \quad b = 7, \quad x = \dots$

c) $a = 4, \quad b = 9, \quad x = \dots$ d) $a = 3, \quad b = 5, \quad x = \dots$

11. Podaj taką liczbę wymierną w , aby dana liczba była wymierna.

a) $\log_{24}(18 \cdot 81^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots$

b) $\log_{24}(18 \cdot 16^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots$

c) $\log_{24}(18 \cdot 27^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots$

d) $\log_{24}(18 \cdot 64^w) \in \mathbb{Q}$ dla $w = \dots$

12. Dla podanej liczby A podaj przykład liczby rzeczywistej dodatniej $x \neq 1$, dla której liczba $\log_x(x+A)$ jest liczbą wymierną **różną od -1 i 2** . W podanych przykładach liczbę x należy wyrazić wzorem, w którym można używać liczb całkowitych, czterech działań oraz pierwiastkowania kwadratowego. W każdym z przykładów podaj także wartość $w = \log_x(x+A)$.

a) $A = 3\sqrt{2}$, $x = \dots\dots\dots$, $w = \dots\dots\dots$

b) $A = 2\sqrt{3}$, $x = \dots\dots\dots$, $w = \dots\dots\dots$

c) $A = 8\sqrt{3}$, $x = \dots\dots\dots$, $w = \dots\dots\dots$

d) $A = \sqrt{2}$, $x = \dots\dots\dots$, $w = \dots\dots\dots$

13. Rozważamy liczbę $n = 1234567891011121314\dots697071$ powstałą z połączenia zapisów dziesiętnych kolejnych liczb od 1 do 71. Dla podanej liczby d podaj resztę r z dzielenia liczby n przez d .

a) $d = 4$, $r = \dots\dots\dots$ b) $d = 15$, $r = \dots\dots\dots$

c) $d = 3$, $r = \dots\dots\dots$ d) $d = 6$, $r = \dots\dots\dots$

14. Dla podanych h_a, h_b zapisz w postaci przedziału obustronnie otwartego zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych h_c , że istnieje trójkąt o wysokościach długości h_a, h_b, h_c .

a) $h_a = 4$, $h_b = 12$, $h_c \in \dots\dots\dots$ b) $h_a = 2$, $h_b = 2$, $h_c \in \dots\dots\dots$

c) $h_a = 3$, $h_b = 6$, $h_c \in \dots\dots\dots$ d) $h_a = 10$, $h_b = 15$, $h_c \in \dots\dots\dots$

15. Dla podanej liczby d podaj zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:

Istnieje postęp arytmetyczny 61-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d .

a) $d = 2$, $k \in \{ \dots\dots\dots \}$

b) $d = 5$, $k \in \{ \dots\dots\dots \}$

c) $d = 3$, $k \in \{ \dots\dots\dots \}$

d) $d = 4$, $k \in \{ \dots\dots\dots \}$

16. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o sumie 300 zachodzi równość $a_k = w$.

Dla podanej liczby n podaj takie liczby k oraz w , aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby k, w o żądanej własności nie istnieją.

a) $n = 25$, $k = \dots$, $w = \dots$ b) $n = 10$, $k = \dots$, $w = \dots$

c) $n = 5$, $k = \dots$, $w = \dots$ d) $n = 15$, $k = \dots$, $w = \dots$

17. W okrąg o promieniu R wpisano taki czworokąt $ABCD$, że $AB = BC = a$ oraz $CD = DA = b$. Podaj wzór na R w zależności od a i b . Wzór nie może zawierać funkcji trygonometrycznych.

$$R = \dots\dots\dots$$

18. W okrąg o promieniu R wpisano taki sześciokąt $ABCDEF$, że $AB = BC = CD = a$ oraz $DE = EF = FA = b$. Podaj wzór (**bez funkcji trygonometrycznych**) na R w zależności od a i b .

$$R = \dots\dots\dots$$

19. W okrąg o promieniu R wpisano taki ośmiokąt $ABCDEFGH$, że $AB = BC = CD = DE = a$ oraz $EF = FG = GH = HA = b$. Uzupełnij wzór na R w zależności od a i b , wpisując w miejscu kropek odpowiednie współczynniki.

$$R = \sqrt{\dots\dots\dots \cdot a^2 + \dots\dots\dots \cdot ab + \dots\dots\dots \cdot b^2}$$

20. W okrąg o promieniu R wpisany jest taki dwunastokąt $ABCDEFGHIJKL$, że $AB = BC = CD = DE = EF = FG = a$ oraz $GH = HI = IJ = JK = KL = LA = b$. Uzupełnij wzór na R w zależności od a i b , wpisując w miejscu kropek odpowiednie współczynniki.

$$R = \sqrt{\dots\dots\dots \cdot a^2 + \dots\dots\dots \cdot ab + \dots\dots\dots \cdot b^2}$$