

**237.** Liczby rzeczywiste  $a, b, c, d, e$  spełniają równości

$$\begin{cases} a = 2c^2 - 1 \\ b = 2a^2 - 1 \\ c = 2b^2 - 1 \\ c = 4e^3 - 3e \\ d = 4c^3 - 3c \\ e = 4d^3 - 3d \end{cases}$$

Czy stąd wynika, że  $a = b = c = d = e = 1$ ?

**239.** Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej  $p$  istnieje taka liczba naturalna  $n > 2$ , że  $n^{n^n} \equiv 16 \pmod{p}$ .

**241.** Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^8 + b^{48} + c^{49} + d^{120} + e^{121} = f^8$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych  $a, b, c, d, e, f$  spełniających warunek  $\text{NWD}(a, b, c, d, e, f) = 1$ .

**243.** Ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są określone następującymi wzorami:

$$a_0 = 99\,999, \quad a_1 = 1\,699\,999, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 5, \\ a_{n+2} = 10a_{n+1} - 9a_n \quad \text{oraz} \quad b_{n+2} = 10b_{n+1} - 8b_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Wykaż, że  $a_{2025} < b_{2025}$ .

**245.** Udowodnij, że sześcianu o krawędzi 61 nie można wypełnić klockami, z których każdy jest sześcianem o krawędzi 2 lub prostopadłościanem o wymiarach  $3 \times 3 \times 1$ .

**247.** Interesują nas takie liczby naturalne, które mają dokładnie jedno przedstawienie w postaci  $ab + 2a + 3b$ , gdzie  $a, b$  są dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że takich liczb jest nieskończenie wiele.

**249.** Udowodnij, że spośród dowolnych 64 wierzchołków 2015-kąta foremnego można wybrać cztery, które są wierzchołkami trapezu.

**251.** Czy istnieje liczba naturalna większa od 1, którą można przedstawić w postaci  $n^{n^k}$ , gdzie  $n, k$  są dodatnimi liczbami całkowitymi, na co najmniej 2025 sposobów?

**253.** Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite  $m < n < 1,000\,001 \cdot m$ , że liczba  $n^n$  jest podzielna przez  $m^m$ .

**255.** Niech  $k$  będzie liczbą całkowitą dodatnią mniejszą od 34. Udowodnij, że istnieje skończenie wiele liczb pierwszych  $p$ , dla których liczba  $p^k + k$  jest pierwsza.

**Uwaga:** Przy  $k = 34$  istnieje 1919 liczb pierwszych  $p < 10^7$ , dla których  $p^{34} + 34$  jest liczbą pierwszą.