

W poniższych zadaniach udowodnij podane równości (lub inne zależności) **kombinatorycznie**, czyli np. przez zliczanie na dwa sposoby elementów tego samego zbioru.

$$(174) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$(176) \quad \binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \dots + \binom{n-1}{7} + \binom{n}{7} = \binom{n+1}{8}$$

$$(178) \quad 2 \cdot \binom{n}{2} + n = n^2$$

$$(180) \quad 6 \cdot \binom{n}{3} + 6 \cdot \binom{n}{2} + n = n^3$$

$$(182) \quad ??? \cdot \binom{n}{4} + ??? \cdot \binom{n}{3} + ??? \cdot \binom{n}{2} + n = n^4$$

Wykorzystaj powyższą równość do wyprowadzenia wzoru na $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4$.

$$(184) \quad 2 \mid \binom{2n}{n}$$

$$(186) \quad \binom{k+m+n}{k} \cdot \binom{m+n}{m} = \binom{k+m+n}{m} \cdot \binom{k+n}{k}$$

$$(188) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$$

$$(190) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$(192) \quad \sum_{i=0}^k \binom{n}{m+i} \cdot \binom{k}{i} = \binom{n+k}{m+k}$$

$$(194) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot 3^{n-k} = 5^n$$

$$(196) \quad \sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$(198) \quad \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{2} \cdot 2^{n-2}$$

$$(200) \quad n+1 \mid \binom{2n}{n} \quad \text{przez udowodnienie} \quad \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

czyli $\binom{2n}{n} + (n+1) \cdot \binom{2n}{n+1} = (n+1) \cdot \binom{2n}{n}$