201. Liczby rzeczywiste dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}$ spełniają nierówności

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n^2 \leqslant 100 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{2025} a_n^5 \leqslant 800\,.$$

Udowodnij, że

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n^3 < 200\,.$$

203. Liczby rzeczywiste dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}$ spełniają nierówności

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n^3 \leqslant 25 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{2025} a_n^5 \leqslant 256\,.$$

Udowodnij, że

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n^4 < 77\,.$$

205. Liczby rzeczywiste dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}$ spełniają nierówności

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n^2 \leqslant 100 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{2025} a_n^3 \geqslant 500\,.$$

Udowodnij, że

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n^6 > 62\,500\,.$$

207. Liczby rzeczywiste dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2025}$ spełniają nierówności

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n^2 \leqslant 9 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{2025} b_n^2 \leqslant 49\,.$$

Udowodnij, że

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n b_n \leqslant 21\,.$$

209. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}$, $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2025}$ zachodzi nierówność (Cauchy'ego–Schwarza)

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n b_n \leqslant \left(\sum_{n=1}^{2025} a_n^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{2025} b_n^2\right)^{1/2}\,.$$

211. Liczby rzeczywiste dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2025}$ spełniają nierówności

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n^3 \leqslant 27 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{2025} b_n^6 \leqslant 64\,.$$

Udowodnij, że

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n^2 b_n^2 \leqslant 36\,.$$

213. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2025}$ zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n^2 b_n^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{2025} a_n^3\right)^{2/3} \cdot \left(\sum_{n=1}^{2025} b_n^6\right)^{1/3}\,.$$

215. Nierówność Höldera. Niech p, q będą liczbami rzeczywistymi większymi od 1 spełniającymi warunek

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\,.$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}, b_1, b_2, \ldots, b_{2025}$ zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n b_n \leqslant \left(\sum_{n=1}^{2025} a_n^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=1}^{2025} b_n^q\right)^{1/q}\,.$$

217. Niech p, q, r będą liczbami rzeczywistymi większymi od 1 spełniającymi warunek

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1\,.$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}, b_1, b_2, \ldots, b_{2025}, c_1, c_2, \ldots, c_{2025}$ zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{2025} a_n b_n c_n \leqslant \left(\sum_{n=1}^{2025} a_n^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=1}^{2025} b_n^q\right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{n=1}^{2025} c_n^r\right)^{1/r}\,.$$

219. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n, dla której istnieją liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające warunki

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 25\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 33\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 49\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^4 = 81\,.$$

221. Liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{\mathbf{666}}$ spełniają nierówności

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{666}} a_i \geqslant \mathbf{666}\,, \qquad \sum_{i=1}^{\mathbf{666}} a_i^2 \leqslant 1554\,, \qquad \sum_{i=1}^{\mathbf{666}} a_i^3 \geqslant 6\cdot\mathbf{666}\,.$$

Udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{666}} a_i^4 \geqslant 10878\,.$$

223. Udowodnij, że dla każdych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$11abc < (a+b)\cdot(b+c)\cdot(a+b+c)\,.$$

225. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{4\cdot\sqrt[5]{5\cdot\ldots\cdot\sqrt[n-1]{(n-1)\cdot\sqrt[n]{n}}}}}} < 2\,.$$

227. Wyznacz największy możliwy iloczyn liczb całkowitych dodatnich o sumie 200.

229. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$3\left(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\right) \leqslant 4(a+b+c)\,.$$

231. Wyznacz największą taką stałą C, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$n\sqrt{7}\cdot\left\{n\sqrt{7}\right\} > C\,.$$

$\{x\}$ to część ułamkowa x

233. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej ε istnieją takie liczby całkowite dodatnie m i n, że

$$m^3 < n^2 < m^3 + \varepsilon m\,.$$

235. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[16]{x^2+10^{16}}\,.$$

Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{80\,000\,000}\,.$$

Opisz, jak wygląda wykres funkcji f.