118. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

120. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

122. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

124. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt[3]{5-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka sześciennego z liczby wymiernej.

126. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt[5]{11-5\sqrt{5}}+\sqrt[5]{11+5\sqrt{5}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka całkowitego stopnia z liczby wymiernej.

128. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt[9]{38-17\sqrt{5}}+\sqrt[9]{38+17\sqrt{5}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka całkowitego stopnia z liczby wymiernej.

130. Wyznacz najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią M, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
$$ab+bc\leqslant M\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right) .$$

132. Wyznacz najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią M, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność
$$ab+bc+cd\leqslant M\cdot\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) .$$

134. Wyznacz najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią M, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność
$$ab+bc+cd+de\leqslant M\cdot\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right) .$$

136. Czy wśród dowolnych 5 osób znajdą się 3 osoby, z których każde dwie się znają, lub 3 osoby, z których żadne dwie się nie znają?

138. Dowieść, że wśród dowolnych 6 osób znajdą się 3 osoby, z których każde dwie się znają, lub 3 osoby, z których żadne dwie się nie znają.

140. Każde dwa wierzchołki 10-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

142. Każde dwa wierzchołki 9-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

144. Każde dwa wierzchołki 18-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czworokąt, którego wszystkie boki i przekątne są tego samego koloru.

146. Każde dwa wierzchołki 17-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał trójkąt, którego wszystkie boki są tego samego koloru.

148. Każde dwa wierzchołki 66-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym, fioletowym lub niebieskim. Dowieść, że powstał trójkąt, którego wszystkie boki są tego samego koloru.

150. Każde dwa wierzchołki 34-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony trójkąt lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

152. Każde dwa wierzchołki 85-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czerwony trójkąt lub zielony czworokąt z zielonymi przekątnymi lub niebieski czworokąt z niebieskimi przekątnymi.

154. Każde dwa wierzchołki 254-kąta foremnego połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub niebieskim. Dowieść, że powstał czworokąt, którego wszystkie boki i przekątne są tego samego koloru.

156. Liczby niewymierne dodatnie α i β spełniają równanie

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\,.$$

Dla $n\in\mathbb{N}$ (przypomnienie: liczby naturalne to u nas liczby całkowite dodatnie) definiujmy

$$a_n=[\alpha n] \qquad \text{oraz} \qquad b_n=[\beta n]\ ,$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Dowieść, że każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z ciągów (a_n), (b_n).

158. Niech $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ będzie *złotą liczbą.*
Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$[\varphi\cdot[\varphi n]]<\left[\varphi^2 n\right].$$

160. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$[\varphi\cdot([\varphi n]+1)]>\left[\varphi^2 n\right].$$

162. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$[\varphi\cdot[\varphi n]]+1=\left[\varphi^2 n\right].$$

164. Niech $a_n=\left[n\cdot\sqrt{2}\right]$ dla $n=1,2,3,\ldots$ oraz niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem złożonym ze wszystkich liczb całkowitych dodatnich niewystępujących w ciągu (a_n). Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczby a_n i b_n są tej samej parzystości.

166. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania

$$\left[m\cdot\sqrt{10}\right]=\left[n\cdot\sqrt{10}\right]+2m+4n$$

w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

168. Ciągi rosnące (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) o wyrazach całkowitych dodatnich spełniają następujące warunki:
(i) każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z ciągów (a_n), (b_n),
(ii) każda liczba całkowita dodatnia występuje w dokładnie jednym z ciągów (c_n), (d_n),
(iii) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $b_n=a_n+n$,
(iv) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość $d_n=c_n+4n$.
Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność $2b_n\leqslant d_n$.

170. Udowodnić, że równanie

$$\left[m\sqrt{15}\right]=5n+\left[n\sqrt{15}\right]$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

172. Liczby niewymierne dodatnie α i β spełniają równanie

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}+1.$$

Dla $n\in\mathbb{N}$ definiujmy

$$a_n=[\alpha n] \qquad \text{oraz} \qquad b_n=[\beta n].$$

Dokończ i udowodnij: Dowieść, że każda liczba całkowita nieujemna występuje ...