135. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ jest pierwsza.

137. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $\left[\frac{n^3}{9}\right]$ jest pierwsza.

139. Udowodnij, że wśród liczb postaci n^4+44, gdzie n przebiega liczby całkowite od 1 do 2021, jest co najmniej 1950 liczb złożonych.

141. Udowodnij, że wśród liczb postaci $n^{44}+4$, gdzie n przebiega liczby całkowite od 1 do 2021, jest co najmniej 1950 liczb złożonych.

143. Oblicz
$$\sum_{n=1}^{2024} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}\,.$$

145. Rozstrzygnij, czy każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w postaci
$$\frac{a^3+b^5}{c^2+d^7}\,,$$
gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi.

147. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n>1$, dla których istnieją liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}=a_1$ spełniające warunki
$$a_i^2+a_{i+1}^2+50=16a_i+12a_{i+1}$$
dla $i=1,2,\ldots,n$.

149. Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoramienny o wierzchołkach tego samego koloru.

151. Dany jest 2020-kąt foremny. Rozważamy wszystkie trójkąty o wierzchołkach będących wierzchołkami danego 2020-kąta. Których trójkątów jest więcej: ostrokątnych czy rozwartokątnych i ile razy więcej?

153. Oblicz $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

155. Oblicz[1] $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{3k+r}$ w zależności od n oraz $r\in\{0,1,2\}$.

157. Oblicz $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k+r}$ w zależności od n oraz $r\in\{0,1,2,3\}$.

[1] Przyjmujemy $\binom{n}{k}=0$ dla $k>n$.

159. Potęgą nazwiemy każdą liczbę postaci a^b, gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi, a przy tym $b>1$.

Rozstrzygnij, czy istnieje rozwiązanie równania

$$x^5\cdot y^6=z^7$$

w liczby całkowitych dodatnich x, y, z niebędących potęgami.

161. Udowodnij nierówności

$$n^{2000^{11}}<2^n<n^{2222^{11}}$$

dla wskazanej przez siebie liczby naturalnej n

163. Udowodnij nierówności

$$64^n<n^{2^{2024}}<128^n$$

dla wskazanej przez siebie liczby naturalnej n

165. Rozwiąż równanie

$$x=2\cdot[x]\cdot\{x\}$$

w liczbach rzeczywistych dodatnich x.
Uwaga: $[x]$ oraz $\{x\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby x.

167. Liczby pierwsze p, q, r spełniają nierówności

$$p^3<q^7, \qquad p^2<r^3\,.$$

Udowodnij, że $p<qr$.

169. Liczby pierwsze p, q, r spełniają nierówności

$$p^7<q^3, \qquad pq^2<r^9\,.$$

Udowodnij, że $p^5<r^8$.

171. Wskaż odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie s oraz t, a następnie udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, c zachodzą nierówności

$$(abc)^s\leqslant \mathrm{NWD}(a,b,c)\cdot \mathrm{NWW}(a,b,c)\leqslant (abc)^t$$

oraz wykaż, że wskazane liczby s, t są optymalne, tzn. liczby s nie można zastąpić większą, a liczby t mniejszą.

173. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie d, dla których prawdziwe jest następujące zdanie:

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n, jeżeli liczba n^4 jest podzielna przez d, to liczba n^3 jest podzielna przez d.

175. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, d, e, f spełniają równania

$$a+b+c+d+e+f=6$$

oraz

$$ab+bc+cd+de+ef+fa+ad+be+cf+$$
$$+abc+bcd+cde+def+efa+fab+ace+bdf=17\,.$$

Udowodnij, że

$$a^2+c^2+e^2=b^2+d^2+f^2\,.$$

177. Interesują nas liczby całkowite dodatnie n o następujących własnościach:
(i) liczba n w zapisie dziesiętnym ma parzystą liczbę cyfr (przyjmujemy, że zapis dziesiętny liczby naturalnej nie może zaczynać się od cyfry 0), oznaczmy tę liczbę cyfr przez $2k$,
(ii) jeżeli podzielimy liczbę n na dwie grupy k-cyfrowe, a następnie zamienimy te grupy miejscami, to powstanie liczba większa od n będąca wielokrotnością liczby n.

Rozstrzygnij, czy:
a) takie liczby nie istnieją,
b) takie liczby istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
c) takich liczb jest nieskończenie wiele.

179. Rozwiąż równanie

$$4x^4y+4xy^4=4x^2+4y^2+x^8+y^8$$

w liczbach rzeczywistych x, y.

181. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $k>1$, dla których równanie

$$(m^m)^k=n^n$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych m, n większych od 1.

183. Interesują nas rozwiązania równania

$$m^{m^{2021}}=n^{n^k}$$

w liczbach naturalnych m, n, k większych od 2021.

Rozstrzygnij, czy:
a) takie rozwiązania nie istnieją,
b) takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
c) takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

PRZYPOMNIENIE: Potęgowanie wykonujemy **od góry:** $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

185. Interesują nas pary liczb całkowitych dodatnich (m,n) o następującej własności: Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k, jeżeli liczba k jest podzielna przez m i jest podzielna przez n, to jest także podzielna przez $m+n$.

Rozstrzygnij, czy:
a) takie pary nie istnieją,
b) takie pary istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
c) takich par jest nieskończenie wiele.

187. Interesują nas takie trójki liczb całkowitych dodatnich (p, q, r), że

$$\mathrm{NWD}(p,q,r)=1\,,$$

a ponadto spełniona jest następująca własność:

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n, jeżeli liczba n jest podzielna przez p, jest podzielna przez q i jest podzielna przez r, to jest także podzielna przez $p+q+r$.

Rozstrzygnij, czy:
a) takie trójki nie istnieją,
b) takie trójki istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
c) takich trójek jest nieskończenie wiele.

189. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$ spełniających warunki

$$\sum_{k=1}^{9} x_k^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{9} k x_k = 17$$

zachodzą nierówności

$$\frac{1}{11} < \sum_{k=1}^{9} x_k^k < \frac{1}{10}\,.$$

191. Dany jest taki wielomian $W(x)$ stopnia 2^{16} o współczynnikach rzeczywistych, że $W(n)=2^n$ dla $n=0, 1, 2, 3, \ldots, 2^{16}$. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba naturalna $m>2^{16}$, że $W(m)$ jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym dodatnim.

193. Dana jest taka liczba pierwsza p oraz liczby całkowite a, b, c, d, że liczby

$$a+b+c+d \qquad \text{oraz} \qquad a^2+b^2+c^2+d^2$$

są podzielne przez p. Udowodnij, że liczba

$$a^5+b^5+c^5+d^5$$

też jest podzielna przez p.

195. Podaj przykład takiej liczby pierwszej p oraz liczb całkowitych a, b, c, d, e, że liczby

$$a+b+c+d+e \qquad \text{oraz} \qquad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$

są podzielne przez p, ale liczba

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5$$

nie jest podzielna przez p.

197. Dana jest taka liczba pierwsza p oraz liczby całkowite a, b, c, d, e, że liczby

$$a+b+c+d+e \qquad \text{oraz} \qquad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$

są podzielne przez p, ale liczba

$$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3$$

nie jest podzielna przez p. Udowodnij, że liczba

$$a^6+b^6+c^6+d^6+e^6$$

nie jest podzielna przez p.

199. Podaj przykład takiej liczby pierwszej p oraz liczb całkowitych a, b, c, d, e, f, że liczby

$$a+b+c+d+e+f \qquad \text{oraz} \qquad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2$$

są podzielne przez p, liczba

$$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3$$

nie jest podzielna przez p, a liczba

$$a^6+b^6+c^6+d^6+e^6+f^6$$

jest podzielna przez p.