22. Udowodnij, że kwadratu 50×50 nie można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×20 lub 1×21.

24. Interesują nas trójkąty równoramienne, które można podzielić na dwa trójkąty równoramienne. Podaj 4 istotnie różne (niepodobne) rozwązania.

26. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej nieparzystej n liczba n^{32} daje przy dzieleniu przez 128 resztę 1.

28. Podaj dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $123^3 - 1$.

30. Podaj dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $212^5 + 1$.

32. Podaj dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $46^{17} - 5^{17}$.

34. Podaj dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $76^{34} - 5^{34}$.

36. Podaj dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $77^{34} - 2^{34}$.

38. Liczba przekątnych wielokąta foremnego jest podzielna przez 3. Udowodnij, że jest ona podzielna przez 9.

40. W okrąg o promieniu 1 wpisano n-kąt foremny. Dla każdej liczby naturalnej n spełniającej nierówności $2000 \leqslant n \leqslant 2014$ podaj liczbę przekątnych tego n-kąta, których kwadrat długości jest liczbą całkowitą.

42. Dany jest 10-kąt foremny $A_1A_2A_3 \ldots A_{10}$. Udowodnij, że przekątne A_2A_7, A_3A_8 i A_4A_9 przecinają się w jednym punkcie. Wyznacz miary kątów: $\sphericalangle A_2A_7A_4$, $\sphericalangle A_3A_4A_7$, $\sphericalangle A_3A_7A_4$ i $\sphericalangle A_9A_4A_7$.

44. Dany jest 12-kąt foremny $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$. Udowodnij, że przekątne A_1A_5, A_2A_7 i A_3A_{10} przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że przekątne A_1A_5, A_2A_7 i A_4A_{12} przecinają się w jednym punkcie.

46. Dany jest 13-kąt foremny $A_1A_2A_3 \ldots A_{13}$. Uporządkuj następujące trójkąty rosnąco ze względu na pole: $A_1A_4A_8$, $A_1A_6A_8$, $A_1A_8A_{10}$, $A_1A_6A_{10}$, $A_1A_6A_{13}$, $A_1A_6A_{11}$.

48. Dany jest 14-kąt foremny $A_1A_2A_3 \ldots A_{14}$. Połącz następujące trójkąty w pary trójkątów o ilorazie pól równym 2: $A_1A_2A_5$, $A_1A_2A_7$, $A_1A_2A_9$, $A_1A_3A_8$, $A_1A_4A_6$, $A_1A_5A_8$.

50. Dany jest 20-kąt foremny $A_1A_2A_3 \ldots A_{20}$. Który trójkąt ma większe pole: $A_1A_3A_9$ czy $A_1A_4A_8$?

52. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 6$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego można wybrać takich sześć wierzchołków, że sześciokąt przez nie wyznaczony ma wszystkie boki równej długości?

54. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 6$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego można wybrać takich sześć wierzchołków, że sześciokąt przez nie wyznaczony jest równokątny?

56. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 7$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego można wybrać takich siedem wierzchołków, że siedmiokąt przez nie wyznaczony ma boki parami różnej długości?

58. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 5$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 można wybrać takich pięć wierzchołków, że pięciokąt przez nie wyznaczony ma wszystkie boki dłuższe od 1?

60. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 7$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 można wybrać takich siedem wierzchołków, że siedmiokąt przez nie wyznaczony ma wszystkie boki krótsze od 1?

62. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 6$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 można wybrać takich sześć wierzchołków, że sześciokąt przez nie wyznaczony ma wszystkie boki dłuższe od 1?

64. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 6$, spośród wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 można wybrać takich sześć wierzchołków, że sześciokąt przez nie wyznaczony ma wszystkie boki krótsze od 1?

66. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech $0<k<p$. Udowodnij, że liczba $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p.

68. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech a, b będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

70. (Małe twierdzenie Fermata) Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

72. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej a oraz dowolnej liczby naturalnej k

$$a^{k(p-1)+1} \equiv a \pmod{p}.$$

74. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$a^{561} \equiv a \pmod{561}.$$

76. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{22}-2^{22}$.

78. Wskaż dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $5^{16}-2^{16}$.

80. Wskaż dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $13^{46}-2^{46}$.

82. Wskaż trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $5^{88}-2^{88}$.

84. Wskaż trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $3^{66}-2^{66}$.

86. Wskaż cztery dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $2^{210}-1$.

88. Wskaż trzy dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $51^{22}-2^{44}$.

90. Wskaż pięć dwucyfrowych dzielników pierwszych liczby $3^{180}-2^{120}$.

92. Udowodnij, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że

$$n^n \equiv (n+1)^{n+1} \pmod{p}.$$

94. Niech k będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że liczby $6k+1$, $12k+1$, $18k+1$ są pierwsze. Udowodnij, że liczba

$$n=(6k+1)\cdot(12k+1)\cdot(18k+1)$$

jest liczbą Carmichaela, tzn. dla każdej liczby całkowitej a zachodzi

$$a^n \equiv a \pmod{n}.$$

96. Znajdź taką liczbę naturalną $n<55$, że $n^3 \equiv 2 \pmod{55}$.

98. Znajdź taką liczbę naturalną $n<91$, że $n^5 \equiv 2 \pmod{91}$.

100. Znajdź taką liczbę naturalną $n<4141$, że $n^{67} \equiv 3 \pmod{4141}$.

102. Liczba pierwsza p, liczba naturalna k oraz liczby całkowite a, b spełniają warunek $a \equiv b \left(\text{mod } p^k\right)$. Udowodnij, że $a^p \equiv b^p \left(\text{mod } p^{k+1}\right)$.

104. Udowodnij, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz liczby całkowitej a niepodzielnej przez p zachodzi przystawanie

$$a^{p^2-p} \equiv 1 \left(\text{mod } p^2\right).$$

106. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że dowolny dzielnik pierwszy liczby 2^p-1 daje przy dzieleniu przez p resztę 1.

108. Udowodnij, że liczba 127 jest pierwsza nie wykonując żadnego dzielenia tej liczby przez mniejsze liczby.

110. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że dowolny dzielnik pierwszy liczby 2^p+1 różny od 3 daje przy dzieleniu przez p resztę 1.

112. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych zakończonych cyfrą 1.

114. Niech k będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że dowolny dzielnik pierwszy liczby $2^{2^k}+1$ daje przy dzieleniu przez 2^{k+1} resztę 1.

116. Wiedząc, że

$$2^7\cdot 5 \equiv -1 \pmod{641} \qquad \text{oraz} \qquad 5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$$

udowodnij (bez wykonywania żmudnych obliczeń), że

$$2^{32} \equiv -1 \pmod{641}.$$