69. Liczbę pierwszą nazwiemy *klawą*, jeżeli jest dzielnikiem liczby

$$n^{16}+16n+1$$

dla pewnej liczby naturalnej n. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb *klawych*.

71. Komisja Finansowa liczy sześć osób, w tym przewodniczący. Należy zamontować w skarbcu jak najmniejszą liczbę zamków i rozdać klucze członkom komisji tak, aby spełnione były następujące warunki:
- każdych czterech członków KF może otworzyć skarbiec,
- żadnych dwóch członków KF nie może otworzyć skarbca,
- trzech członków KF może otworzyć skarbiec wtedy i tylko wtedy, gdy wśród nich jest przewodniczący.

Wyznacz liczbę zamków, które należy zamontować w skarbcu.

73. Udowodnij, że liczba

$$81^9+36^9+16^9$$

jest złożona.

75. Udowodnij, że istnieje taka liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, że dla $k=1,2,3,4,5,6$ liczby

$$a_1^k+a_2^k+a_3^k+a_4^k+a_5^k+a_6^k+a_7^k$$

są podzielne przez p, ale liczba

$$a_1^7+a_2^7+a_3^7+a_4^7+a_5^7+a_6^7+a_7^7$$

nie jest podzielna przez p.

77. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają nierówności

$$x+y+z\geqslant 6, \qquad xy+yz+zx\geqslant 11, \qquad xyz\leqslant 6.$$

Udowodnij, że

$$x^2y+y^2z+z^2x+x^2z+y^2x+z^2y\geqslant 48.$$

79. Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, że

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=7.$$

Wykaż, że istnieje permutacja

$$(b_1,\, b_2,\, b_3,\, b_4,\, b_5,\, b_6,\, b_7)$$

liczb

$$(a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5,\, a_6,\, a_7),$$

dla której spełniona jest nierówność

$$b_1b_2+b_2b_3+b_3b_4+b_4b_5+b_5b_6+b_6b_7+b_7b_1\leqslant 7.$$

81. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b i c, że liczby $a+b+c$ oraz $a^4+b^4+c^4$ są podzielne przez p, ale liczba $a^{16}+b^{16}+c^{16}$ nie jest podzielna przez p.

83. Wykaż, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba $(54n)!$ jest podzielna przez liczbę $(56!)^n$.

85. Udowodnij, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba $(92n)!$ jest podzielna przez liczbę $(95!)^n$.

87. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $\left(n^2\right)!$ jest podzielna przez $(n!)^{n+1}$.

89. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba $\left(n^2\right)!$ nie jest podzielna przez $(n!)^{n+2}$.

91. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba $\left(n^2\right)!$ jest podzielna przez $(n!)^{n+2}$.

93. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $(2n)!$ jest podzielna przez $n!\cdot(n+1)!$.

95. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba $(2n)!$ jest podzielna przez $n!\cdot(n+2)!$.

97. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba $(2n)!$ nie jest podzielna przez $n!\cdot(n+2)!$.

99. Liczby naturalne n_0, n_1, n_2, ..., n_{28} spełniają równanie

$$n_0^{15}=n_1^{15}+n_1^{15}+\ldots+n_{28}^{15}.$$

Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb n_0, n_1, n_2, ..., n_{28} jest podzielna przez 31.

101. Liczby całkowite dodatnie n_1, n_2, ..., n_{1000}, m spełniają równanie

$$n_1^{256}+n_2^{256}+n_3^{256}+\ldots+n_{1000}^{256}=m^{256}.$$

Udowodnij, że

$$m>10^{74}.$$

103. Czy prostokątnymi paskami papieru o wymiarach 1×4 można okleić trzy ściany prostopadłościanu $10\times 10\times 11$ mające wspólny wierzchołek? Paski można zaginać wzdłuż krawędzi prostopadłościanu, ale nie mogą na siebie zachodzić ani wystawać poza oklejane ściany.

105. Rozstrzygnij, czy istnieje sześcian o wierzchołkach w punktach kratowych, którego długość krawędzi nie jest liczbą całkowitą.

107. Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\ldots+\frac{k}{k^4+k^2+1}+\ldots+\frac{2016}{2016^4+2016^2+1}<\frac{1}{2}.$$

109. Czy spośród dowolnych 35 różnych liczb naturalnych można wybrać takie trzy różne liczby a, b, c, że liczba $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ jest podzielna przez 17?

111. Czy spośród dowolnych 34 różnych liczb naturalnych można wybrać takie trzy różne liczby a, b, c, że liczba $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ jest podzielna przez 17?

113. Czy spośród dowolnych 38 różnych liczb naturalnych można wybrać takie trzy różne liczby a, b, c, że liczba $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ jest podzielna przez 19?

115. W rejs łódką po jeziorze może wyruszyć trzech turystów. Czy można tak zaplanować rejsy dla 7-osobowej wycieczki, aby każdych dwóch uczestników płynęło ze sobą dokładnie raz?

117. W rejs łódką po jeziorze może wyruszyć trzech turystów. Czy można tak zaplanować rejsy dla 13-osobowej wycieczki, aby każdych dwóch uczestników płynęło ze sobą dokładnie raz?

119. W rejs łódką po jeziorze może wyruszyć czterech turystów. Czy można tak zaplanować rejsy dla 13-osobowej wycieczki, aby każdych dwóch uczestników płynęło ze sobą dokładnie raz?

121. W rejs łódką po jeziorze może wyruszyć trzech lub czterech turystów. Czy można tak zaplanować rejsy dla 17-osobowej wycieczki, aby każdych dwóch uczestników płynęło ze sobą dokładnie raz?

123. W rejs łódką po jeziorze może wyruszyć trzech lub czterech turystów. Czy można tak zaplanować rejsy dla 19-osobowej wycieczki, aby każdych dwóch uczestników płynęło ze sobą dokładnie raz, a przy tym co najmniej raz płynęło łódką czterech turystów?

125. W rozgrywkach ligi piłkarskiej bierze udział $2n$ drużyn. Zaplanuj rozgrywki każdy z każdym w formie $2n-1$ kolejek tak, aby każda drużyna grała w każdej kolejce dokładnie jeden mecz.

127. Udowodnij, że istnieją takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_{201}$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 15\}$, że dla każdych $1 \leqslant i < j \leqslant 201$ zbiór $A_i \cap A_j$ ma co najwyżej trzy elementy.

129. Ile najwięcej można wybrać podzbiorów zbioru 7-elementowego tak, aby każde dwa wybrane podzbiory różniły się przynależnością co najmniej trzech elementów (czyli, aby różnica symetryczna tych podzbiorów była co najmniej 3-elementowa)?

131. Ile najwięcej można wybrać podzbiorów zbioru 15-elementowego tak, aby każde dwa wybrane podzbiory różniły się przynależnością co najmniej trzech elementów?

133. Udowodnij, że na przestrzennej szachownicy $8 \times 8 \times 8$ można tak ustawić 32 wieże, aby każde pole było zajęte lub atakowane przez jakąś wieżę.