Kolokwium nr 4: środa 4.12.2024, godz. 8:30–10:00, materiał zad. 1–404.

9. Funkcje ciągłe.

Przykłady z wykładu.

381. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|\,,$$

gdzie $f(x)=\sqrt{x^2+37}$.

382. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[8]{x^2+10^8}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{4000}\,.$$

383. Niech funkcja $f:[8,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[8,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{12}\,.$$

384. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{16}\,.$$

Zadania do omówienia[1] na części ćwiczeń w poniedziałek 25.11.2024 oraz na ćwiczeniach w czwartek 28.11.2024 i w poniedziałek 2.12.2024.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

385. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+10^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{20}\,.$$

[1] Zadania podobne do wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

386. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

387. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

388. Niech funkcja $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt[16]{x}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[1,\infty)$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

389. Niech funkcja $f:[3,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{x^3}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[3,\infty)$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{25}\,.$$

390. Niech funkcja $f:[16,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[16,\infty)$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{128}\,.$$

391. Niech funkcja $f:[8,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[8,\infty)$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/60$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/80$.

392. Niech funkcja $f:[25,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[25,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/10$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/12$.

393. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=x^2$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

394. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x}$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

395. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^2+10^8}\,.$$

Dla wybranych przez siebie liczb rzeczywistych x, y udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>0,6\cdot|x-y|\,.$$

396. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[16]{x^2+10^{16}}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{80\,000\,000}\,.$$

Opisać, jak wygląda wykres funkcji f.

397. Dowieść, że równanie $\cos x=x$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

398. Dowieść, że równanie $\cos x=x^2$ ma co najmniej dwa rozwiązania.

399. Dowieść, że równanie

$$x^{2023}+x=2023$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

400. Dowieść, że równanie

$$x^2=25\pi^2\cdot\cos x$$

ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

401. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000}+2=(1,000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

Jak wyglądają wykresy obu stron równania jako funkcji zmiennej x?

402. Rozważamy funkcję $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}\,.$$

Udowodnić, że funkcja f nie spełnia warunku Lipschitza[2].

403. Udowodnić, że funkcja z poprzedniego zadania jest jednostajnie ciągła[3]. W tym celu udowodnić, że dla każdych $x,y\geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\sqrt{|x-y|}\,.$$

404. Dla których liczb

$$n\in\left\{2,\,4,\,10,\,20,\,50,\,100,\,200,\,500,\,1000,\,10^5,\,10^{10},\,10^{30},\,10^{100},\,10^{1000}\right\}$$

wykres funkcji

$$f(x)=2^x$$

przecina wykres funkcji

$$g(x)=x^n+4\,,$$

jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm? Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

Można przyjąć przybliżenie $2^{10}\approx 10^3$.

W miarę wolnego czasu i stosownie do potrzeb zgłoszonych przez studentów

omówić zadania 5, 6, 8, 11 i 12 z kolokwium nr 3.

[2]Mówimy, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza, jeżeli istnieje taka stała C, że dla każdych $x,y\in D_f$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

[3]W tej chwili nie musisz znać i rozumieć pojęcia jednostajnej ciągłości. Zadanie polega na udowodnieniu podanej nierówności.