W każdym z poniższych zadań podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

334. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ 1}]\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

335. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)^2}$ $D_f=[\mathbf{1,\ +\infty})$

336. $f(x)=\sqrt{(x-1)^2\cdot(x-4)}$ $D_f=\mathbf{\{1\}}\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

337. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x-4)}$ $D_f=[\mathbf{-1,\ 1}]\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

338. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x^2-4)}$ $D_f=[\mathbf{-2,\ 1}]\cup[\mathbf{2,\ +\infty})$

339. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x^2-4)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -2}]\cup[\mathbf{-1,\ 1}]\cup[\mathbf{2,\ +\infty})$

340. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)^2\cdot(x^2-4)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -2}]\cup\mathbf{\{-1\}}\cup\mathbf{\{1\}}\cup[\mathbf{2,\ +\infty})$

341. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x-9)\cdot(x-16)}$ $D_f=[\mathbf{4,\ 9}]\cup[\mathbf{16,\ +\infty})$

342. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2022}\cdot(x-9)^{2022}\cdot(x-16)^{2021}}$ $D_f=\mathbf{\{4\}}\cup\mathbf{\{9\}}\cup[\mathbf{16,\ +\infty})$

343. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2021}\cdot(x-9)^{2021}\cdot(x-16)^{2022}}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ 4}]\cup[\mathbf{9,\ +\infty})$

344. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2021}\cdot(x-9)^{2022}\cdot(x-16)^{2021}}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ 4}]\cup\mathbf{\{9\}}\cup[\mathbf{16,\ +\infty})$

345. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -4}]\cup\mathbf{\{4\}}\cup[\mathbf{9,\ +\infty})$

346. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=[\mathbf{-4,\ -3}]\cup[\mathbf{3,\ +\infty})$

347. $f(x)=\sqrt{(x^2-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=$
$=(\mathbf{-\infty,\ -4}]\cup[\mathbf{-3,\ -2}]\cup[\mathbf{2,\ 3}]\cup[\mathbf{4,\ +\infty})$

348. $f(x)=\sqrt{(x^2-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^4-16)}$ $D_f=(\mathbf{-\infty,\ -3}]\cup\mathbf{\{-2\}}\cup\mathbf{\{2\}}\cup[\mathbf{3,\ +\infty})$

349. $f(x)=\sqrt{(3-\log_2 x)\cdot(5-\log_2 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=(\mathbf{0,\ 8}]\cup[\mathbf{27,\ 32}]$

350. $f(x)=\sqrt{(3-\log_2 x)\cdot(2-\log_5 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=(\mathbf{0,\ 8}]\cup[\mathbf{25,\ 27}]$

351. $f(x)=\sqrt{(3-\log_4 x)\cdot(6-\log_2 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=(\mathbf{0,\ 27}]\cup\mathbf{\{64\}}$

352. $f(x)=\sqrt{\log_2\log_3 x}$ $D_f=[\mathbf{3,\ +\infty})$

353. $f(x)=\sqrt{\log_3\log_2 x}$ $D_f=[\mathbf{2,\ +\infty})$

354. $f(x)=\sqrt{\log_5\log_3\log_2 x}$ $D_f=[\mathbf{8,\ +\infty})$

355. $f(x)=\sqrt{\log_3\log_2\log_5 x}$ $D_f=[\mathbf{25,\ +\infty})$

356. $f(x)=\log_2\log_x 256$ $D_f=(\mathbf{1,\ +\infty})$

357. $f(x)=\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=(\mathbf{1,\ 256})$

358. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=(\mathbf{1,\ 16})$

359. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $\qquad D_f=(\mathbf{1},\ \mathbf{4})$

360. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $\qquad D_f=\left(\mathbf{1},\ \sqrt{\mathbf{2}}\right)$

361. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y|\,,$$

a dla każdych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $|x-y|\geqslant 10$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Dowieść, że

$$|f(6)-f(0)|\leqslant 50\,.$$

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika z następujących nierówności, wykorzystujących nierówność trójkąta oraz założenia o funkcji f:

$$|f(6)-f(0)|=|f(6)-f(10)+f(10)-f(0)|\leqslant|f(6)-f(10)|+|f(10)-f(0)|\leqslant$$
$$\leqslant 10\cdot|6-10|+|10-0|=40+10=50\,.$$

362. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+5)-f(x)|\leqslant 5 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 35\,, \qquad (\textbf{wersja łatwiejsza})$$
$$|f(8)-f(0)|\leqslant 30\,. \qquad (\textbf{wersja trudniejsza})$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5)-f(0)|\leqslant 5$$

oraz

$$|f(8)-f(5)|\leqslant 10\cdot|8-5|=30\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(8)-f(0)|=\left|\big(f(8)-f(5)\big)+\big(f(5)-f(0)\big)\right|\leqslant|f(8)-f(5)|+|f(5)-f(0)|\leqslant 30+5=35\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5)-f(0)|\leqslant 5\,,$$
$$|f(10)-f(5)|\leqslant 5$$

oraz

$$|f(8)-f(10)|\leqslant 10\cdot|8-10|=20\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$|f(8)-f(0)|=\Big|\Big(f(8)-f(10)\Big)+\Big(f(10)-f(5)\Big)+\Big(f(5)-f(0)\Big)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant|f(8)-f(10)|+|f(10)-f(5)|+|f(5)-f(0)|\leqslant 20+5+5=30\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

363. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y|\quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+10)-f(x)|\leqslant 10\quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 80\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$
$$|f(17)-f(0)|\leqslant 50\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10)-f(0)|\leqslant 10$$

oraz

$$|f(17)-f(10)|\leqslant 10\cdot|17-10|=70\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(17)-f(0)|=\Big|\Big(f(17)-f(10)\Big)+\Big(f(10)-f(0)\Big)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant|f(17)-f(10)|+|f(10)-f(0)|\leqslant 70+10=80\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10)-f(0)|\leqslant 10\,,$$
$$|f(20)-f(10)|\leqslant 10$$

oraz

$$|f(17)-f(20)|\leqslant 10\cdot|17-20|=30\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$|f(17)-f(0)|=\Big|\big(f(17)-f(20)\big)+\big(f(20)-f(10)\big)+\big(f(10)-f(0)\big)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant|f(17)-f(20)|+|f(20)-f(10)|+|f(10)-f(0)|\leqslant 30+10+10=50\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

364. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste x, y. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy

$$t_0=x,\quad t_1=x+\frac{y-x}{n},\quad t_2=x+2\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_3=x+3\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_4=x+4\cdot\frac{y-x}{n},\quad \dots$$
$$\dots,\quad t_{n-2}=x+(n-2)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_{n-1}=x+(n-1)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_n=x+n\cdot\frac{y-x}{n}=y\,.$$

Powyższe punkty dzielą odcinek osi liczbowej od x do y na n równych części.

Wówczas na mocy założenia o funkcji f zachodzą nierówności

$$|f(t_0)-f(t_1)|\leqslant(t_0-t_1)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$
$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant(t_1-t_2)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$
$$|f(t_2)-f(t_3)|\leqslant(t_2-t_3)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$

....

$$|f(t_{n-2})-f(t_{n-1})|\leqslant(t_{n-2}-t_{n-1})^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$
$$|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant(t_{n-1}-t_n)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych nierówności otrzymujemy

$$|f(x)-f(y)|=$$
$$=|(f(t_0)-f(t_1))+(f(t_1)-f(t_2))+(f(t_2)-f(t_3))+\ldots+(f(t_{n-1})-f(t_n))|\leqslant$$
$$\leqslant|f(t_0)-f(t_1)|+|f(t_1)-f(t_2)|+|f(t_2)-f(t_3)|+\ldots+|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\ldots+\frac{(x-y)^2}{n^2}=\frac{(x-y)^2}{n}\,.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{(x-y)^2}{n}$$

prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n, a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x)-f(y)|=0$. Stąd wynika, że $f(x)=f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.

365. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^{1,001}\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste $x<y$. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy

$$t_0=x,\quad t_1=x+\frac{y-x}{n},\quad t_2=x+2\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_3=x+3\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_4=x+4\cdot\frac{y-x}{n},\quad \ldots$$

$$\ldots,\quad t_{n-2}=x+(n-2)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_{n-1}=x+(n-1)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_n=x+n\cdot\frac{y-x}{n}=y\,.$$

Powyższe punkty dzielą odcinek osi liczbowej od x do y na n równych części.

Wówczas na mocy założenia o funkcji f zachodzą nierówności

$$|f(t_0)-f(t_1)|\leqslant(t_0-t_1)^{1,001}=\left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}\,,$$

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant(t_1-t_2)^{1,001}=\left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}\,,$$

$$|f(t_2)-f(t_3)|\leqslant(t_2-t_3)^{1,001}=\left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}\,,$$

....

$$|f(t_{n-2})-f(t_{n-1})|\leqslant(t_{n-2}-t_{n-1})^{1,001}=\left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}\,,$$

$$|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant(t_{n-1}-t_n)^{1,001}=\left(\frac{y-x}{n}\right)^{1,001}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych nierówności otrzymujemy

$$|f(x)-f(y)|=$$

$$=|(f(t_0)-f(t_1))+(f(t_1)-f(t_2))+(f(t_2)-f(t_3))+\ldots+(f(t_{n-1})-f(t_n))|\leqslant$$

$$\leqslant|f(t_0)-f(t_1)|+|f(t_1)-f(t_2)|+|f(t_2)-f(t_3)|+\ldots+|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}+\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}+\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}+\ldots+\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1,001}}=\frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1/1000}}\,.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \frac{(x-y)^{1,001}}{n^{1/1000}}$$

prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n, a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x)-f(y)|=0$. Stąd wynika, że $f(x)=f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.

366. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \frac{1}{(x-y)^2+1}\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste $x<y$. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy $z_n=y+n$.

Wówczas na mocy założenia o funkcji f oraz nierówności trójkąta otrzymujemy

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(z_n)|+|f(z_n)-f(y)|\leqslant\frac{1}{(x-z_n)^2+1}+\frac{1}{(z_n-y)^2+1}<$$

$$<\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}=\frac{2}{n^2+1}\,.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{2}{n^2+1}$$

prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n, a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x)-f(y)|=0$. Stąd wynika, że $f(x)=f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.

367. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,.$$

Dowieść, że f jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Wykres funkcji f jest krzywą o równaniu

$$y=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,,$$

czyli

$$24y+25x=\sqrt{49x^2+37}\,.$$

Z powyższego rówania wynika

$$24y+24x=\sqrt{49x^2+37}-x\geqslant\sqrt{49x^2+37}-|x|=\sqrt{49x^2+37}-\sqrt{x^2}>0\,,$$

a z podobnego równania

$$24y+25x=-\sqrt{49x^2+37}$$

dochodzimy do

$$24y+24x=-\sqrt{49x^2+37}-x\leqslant-\sqrt{49x^2+37}+|x|=-\sqrt{49x^2+37}+\sqrt{x^2}<0\,.$$

Zatem równanie wykresu funkcji f można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x+y>0$. Otrzymujemy kolejno

$$576y^2+1200xy+625x^2=49x^2+37, \qquad x+y>0$$

$$576y^2+1200xy+576x^2=37, \qquad x+y>0$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x=y$, co oznacza, że funkcja f jest funkcją odwrotną do samej siebie.

368. Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru a, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f(0)=1$ oraz $f(1)=a+\sqrt{2}$, funkcja f ma szansę być odwrotną do samej siebie tylko wtedy, gdy

$$0=f(f(0))=a+\sqrt{2}\,,$$

czyli tylko dla $a=-\sqrt{2}$.

Wykażemy, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=-\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Wykres funkcji f jest krzywą[1] o równaniu

$$y=-\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{x^2+1}\,,$$

czyli

$$y+\sqrt{2}\cdot x=\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (\heartsuit)$$

[1] Z uzyskanej w dalszej części rozwiązania postaci równania tej krzywej można stwierdzić, że krzywa ta jest hiperbolą. A dokładniej jest jedną gałęzią hiperboli, podczas gdy druga gałąź jest opisywana przez równanie $(\diamondsuit)$.

Z powyższego równania wynika

$$y+x=\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot x\geqslant\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|>\sqrt{x^2}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=$$
$$=|x|-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot|x|\geqslant 0\,,$$

natomiast z podobnego równania

$$y+\sqrt{2}\cdot x=-\sqrt{x^2+1} \tag{$\diamondsuit$}$$

dochodzimy do

$$y+x=-\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot x\leqslant-\sqrt{x^2+1}+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|<-\sqrt{x^2}+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=$$
$$=-|x|+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=\left(\sqrt{2}-2\right)\cdot|x|\leqslant 0\,.$$

Podsumujmy:

$$y+\sqrt{2}\cdot x=\sqrt{x^2+1}\quad\Rightarrow\quad x+y>0$$

oraz

$$y+\sqrt{2}\cdot x=-\sqrt{x^2+1}\quad\Rightarrow\quad x+y<0\,,$$

a więc w równaniu

$$y+\sqrt{2}\cdot x=\pm\sqrt{x^2+1}$$

znak "$\pm$" jest taki sam jak znak liczby $x+y$.

Idea powyższych oszacowań jest następująca: W wyrażeniu

$$\pm\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot x\,,$$

które jest równe sumie $x+y$, pierwszy składnik ma większą wartość bezwzględną niż drugi, a więc znak całego wyrażenia (czyli znak $x+y$) będzie taki sam jak znak pierwszego składnika, czyli jak znak "$\pm$".

Zatem równanie ($\heartsuit$) wykresu funkcji f można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x+y>0$, gdyż nierówność ta wymusza, aby pierwiastek był ze znakiem plus, a nie minus.

Otrzymujemy kolejno

$$y^2+2\sqrt{2}\cdot xy+2x^2=x^2+1,\qquad x+y>0$$
$$y^2+2\sqrt{2}\cdot xy+x^2=1,\qquad x+y>0$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$, co oznacza, że funkcja f jest funkcją odwrotną do samej siebie.

Odpowiedź: Jedyną wartością parametru spełniającą warunki zadania jest $a=-\sqrt{2}$.

369. Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru a, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+2}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Identyczne jak w zadaniu poprzednim, gdyż zmiana 1 na 2 pod pierwiastkiem nie wpływa na tok rozumowania.

Odpowiedź: Jedyną wartością parametru spełniającą warunki zadania jest $a=-\sqrt{2}$.

W każdym z poniższych 10 zadań dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

370. $a=1$, $\boldsymbol{b=-\sqrt{2}}$

371. $a=-1$, $\boldsymbol{b=-\sqrt{2}}$

372. $a=2$, $\boldsymbol{b=-\sqrt{5}}$

373. $a=-2$, $\boldsymbol{b=-\sqrt{5}}$

374. $a=3$, $\boldsymbol{b=-\sqrt{10}}$

375. $a=-3$, $\boldsymbol{b=-\sqrt{10}}$

376. $a=3/4$, $\boldsymbol{b=-5/4}$

377. $a=-3/4$, $\boldsymbol{b=-5/4}$

378. $a=4/3$, $\boldsymbol{b=-5/3}$

379. $a=-4/3$, $\boldsymbol{b=-5/3}$

380. Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podanymi niżej wzorami i wykresami funkcji na kolejnych stronach. W każdym z zadań **380.a-380.j** podaj numer rysunku, na którym znajduje się wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem.

Przypomnienie: $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

380.a. $f(x)=\{|x|\}$ **5**

380.b. $f(x)=\{x\}^2$ **1**

380.c. $f(x)=\{|x|\}^2$ **4**

380.d. $f(x)=\sqrt{\{x\}}$ **8**

380.e. $f(x)=\sqrt{\{|x|\}}$ **7**

380.f. $f(x)=\left\{\sqrt{|x|}\right\}$ **6**

380.g. $f(x)=\sqrt[5]{\{x\}}$ **9**

380.h. $f(x)=\{\sqrt[5]{x}\}$ **10**

380.i. $f(x)=\{x\}^5$ **2**

380.j. $f(x)=\{|x|\}^5$ **3**