Zadania do omówienia[1] na części ćwiczeń w poniedziałek 18.11.2024, ćwiczeniach w czwartek 21.11.2024 i części ćwiczeń w poniedziałek 25.11.2024.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

8. Funkcje.

332. Niech f będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\log_x 64\,.$$

Podać obrazy i przeciwobrazy zbiorów:

a) $f\left[\left(0,\frac{1}{2}\right)\right]$ **b)** $f\left[\left(\frac{1}{2},1\right)\right]$ **c)** $f\,[(1,2)]$ **d)** $f\,[(2,\infty)]$

e) $f^{-1}\,[(-\infty,-2)]$ **f)** $f^{-1}\,[(-2,0)]$ **g)** $f^{-1}\,[(0,2)]$ **h)** $f^{-1}\,[(2,\infty)]$

333. Podać wzór i dziedzinę funkcji odwrotnej do funkcji f określonej podanym wzorem:

a) $f(x)=x^3+3x^2+3x$ **b)** $f(x)=\sqrt{x^3+8}$ **c)** $f(x)=\ln(1+e^x)$ **d)** $f(x)=\ln(1-e^x)$

W każdym z poniższych zadań podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

334. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)}$ $D_f=$ ....

335. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x-4)^2}$ $D_f=$ ....

336. $f(x)=\sqrt{(x-1)^2\cdot(x-4)}$ $D_f=$ ....

337. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x-4)}$ $D_f=$ ....

338. $f(x)=\sqrt{(x-1)\cdot(x^2-4)}$ $D_f=$ ....

339. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x^2-4)}$ $D_f=$ ....

340. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)^2\cdot(x^2-4)}$ $D_f=$ ....

341. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x-9)\cdot(x-16)}$ $D_f=$ ....

342. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2022}\cdot(x-9)^{2022}\cdot(x-16)^{2021}}$ $D_f=$ ....

343. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2021}\cdot(x-9)^{2021}\cdot(x-16)^{2022}}$ $D_f=$ ....

[1]Sugeruję najpierw omówić zadania od **356** do końca listy.

344. $f(x)=\sqrt{(x-4)^{2021}\cdot(x-9)^{2022}\cdot(x-16)^{2021}}$ $D_f=$ ....

345. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=$ ....

346. $f(x)=\sqrt{(x-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=$ ....

347. $f(x)=\sqrt{(x^2-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^2-16)}$ $D_f=$ ....

348. $f(x)=\sqrt{(x^2-4)\cdot(x^2-9)\cdot(x^4-16)}$ $D_f=$ ....

349. $f(x)=\sqrt{(3-\log_2 x)\cdot(5-\log_2 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=$ ....

350. $f(x)=\sqrt{(3-\log_2 x)\cdot(2-\log_5 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=$ ....

351. $f(x)=\sqrt{(3-\log_4 x)\cdot(6-\log_2 x)\cdot(3-\log_3 x)}$ $D_f=$ ....

352. $f(x)=\sqrt{\log_2\log_3 x}$ $D_f=$ ....

353. $f(x)=\sqrt{\log_3\log_2 x}$ $D_f=$ ....

354. $f(x)=\sqrt{\log_5\log_3\log_2 x}$ $D_f=$ ....

355. $f(x)=\sqrt{\log_3\log_2\log_5 x}$ $D_f=$ ....

356. $f(x)=\log_2\log_x 256$ $D_f=$ ....

357. $f(x)=\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=$ ....

358. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=$ ....

359. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=$ ....

360. $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\log_2\log_x 256$ $D_f=$ ....

361. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y|\,,$$

a dla każdych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $|x-y|\geqslant 10$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Dowieść, że

$$|f(6)-f(0)|\leqslant 50\,.$$

362. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+5)-f(x)|\leqslant 5 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 35\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 30\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

363. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+10)-f(x)|\leqslant 10 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 80\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 50\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

364. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant (x-y)^2\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

365. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant |x-y|^{1,001}\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

366. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant \frac{1}{(x-y)^2+1}\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

367. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,.$$

Dowieść, że f jest odwrotna do samej siebie.

368. Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru a, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

369. Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru a, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+2}$$

jest odwrotna do samej siebie.

W każdym z poniższych 10 zadań dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

370. $a=1$, $b=$ ....

371. $a=-1$, $b=$ ....

372. $a=2$, $b=$ ....

373. $a=-2$, $b=$ ....

374. $a=3$, $b=$ ....

375. $a=-3$, $b=$ ....

376. $a=3/4$, $b=$ ....

377. $a=-3/4$, $b=$ ....

378. $a=4/3$, $b=$ ....

379. $a=-4/3$, $b=$ ....

380. Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podanymi niżej wzorami i wykresami funkcji na kolejnych stronach. W każdym z zadań **380.a-380.j** podaj numer rysunku, na którym znajduje się wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem.

Przypomnienie: $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

380.a. $f(x)=\{|x|\}$ ....

380.b. $f(x)=\{x\}^2$ ....

380.c. $f(x)=\{|x|\}^2$ ....

380.d. $f(x)=\sqrt{\{x\}}$ ....

380.e. $f(x)=\sqrt{\{|x|\}}$ ....

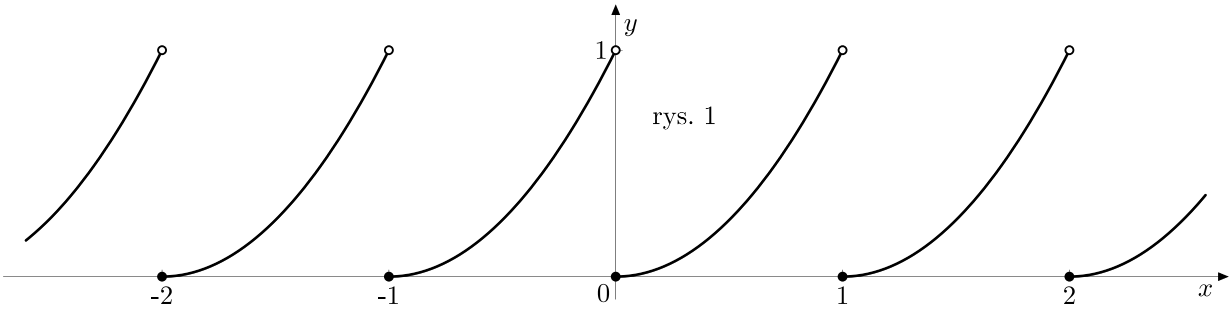
380.f. $f(x)=\left\{\sqrt{|x|}\right\}$ ....

380.g. $f(x)=\sqrt[5]{\{x\}}$ ....

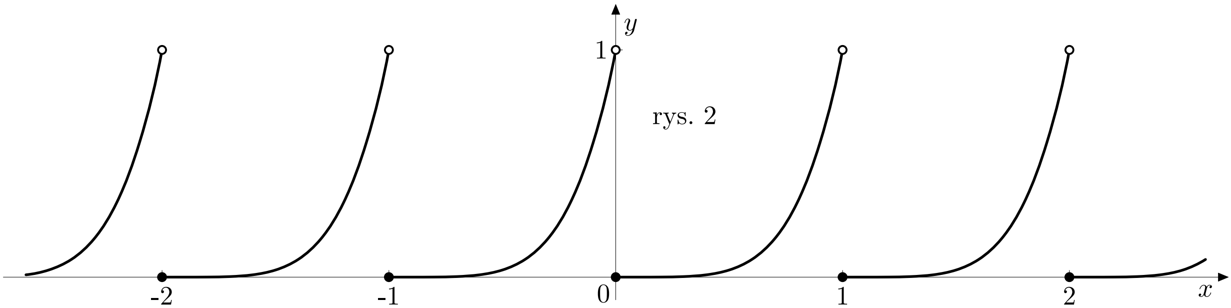
380.h. $f(x)=\{\sqrt[5]{x}\}$ ....

380.i. $f(x)=\{x\}^5$ ....

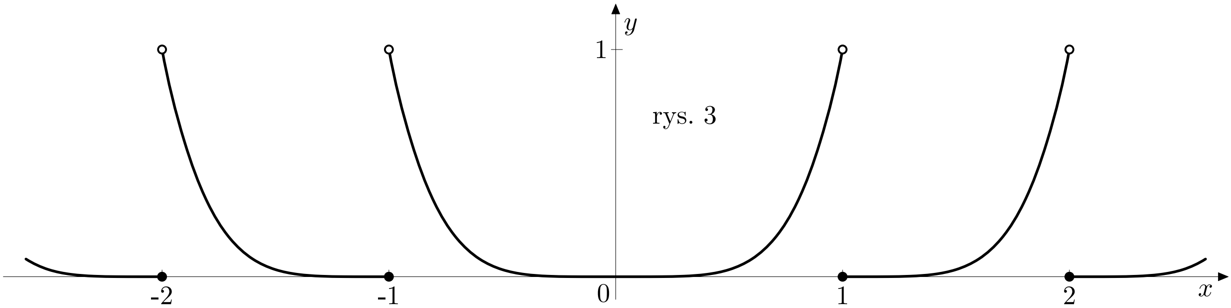
380.j. $f(x)=\{|x|\}^5$ ....



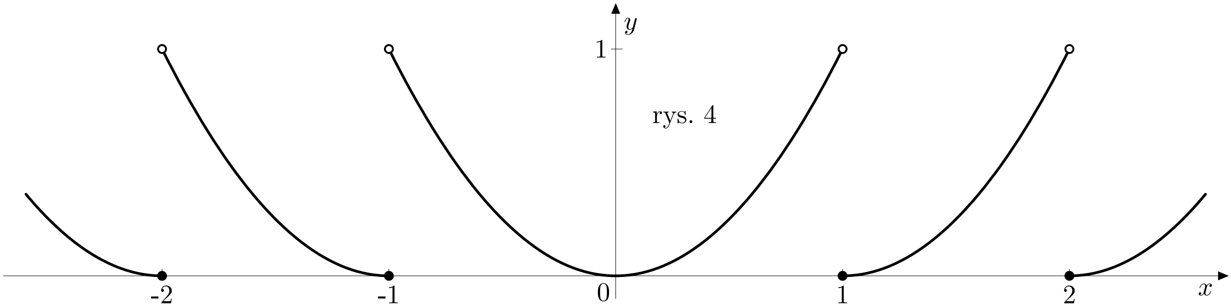
rys. 1



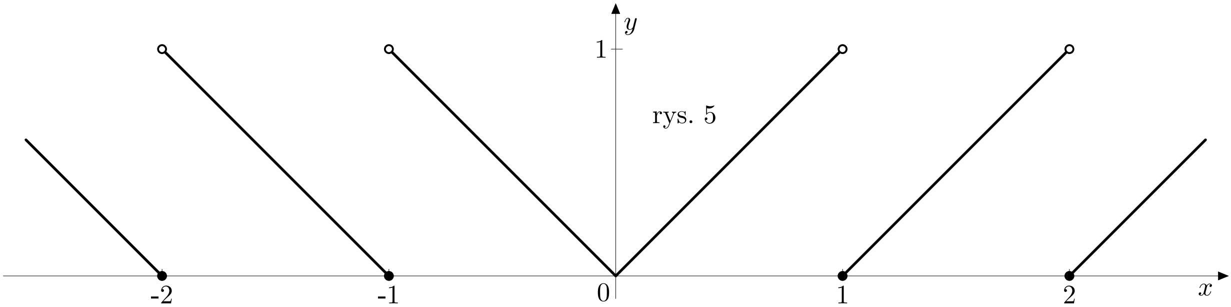
rys. 2



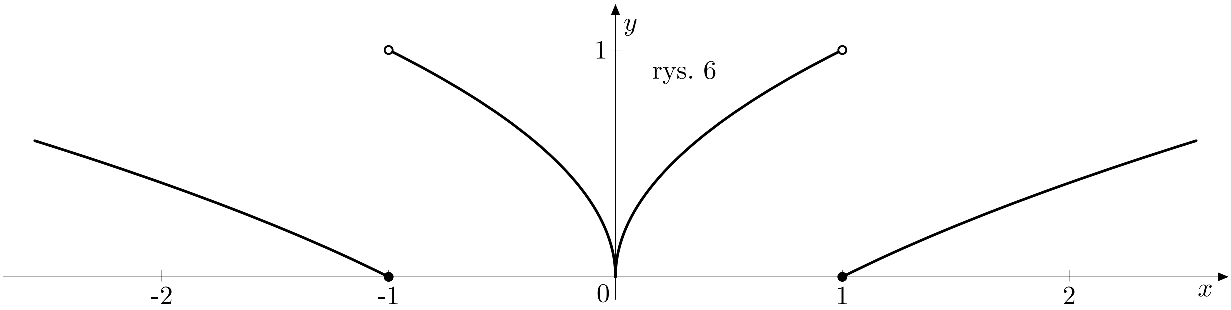
rys. 3

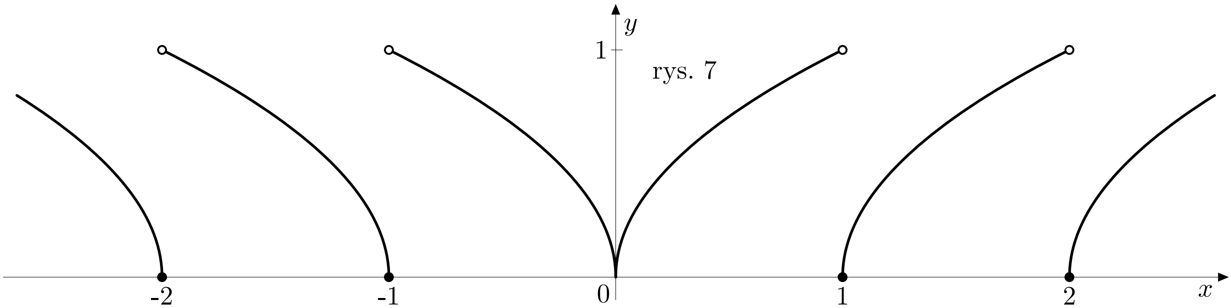


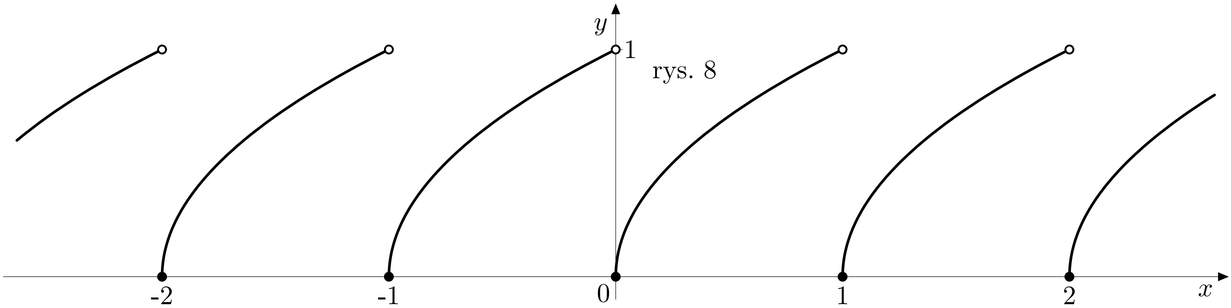
rys. 4

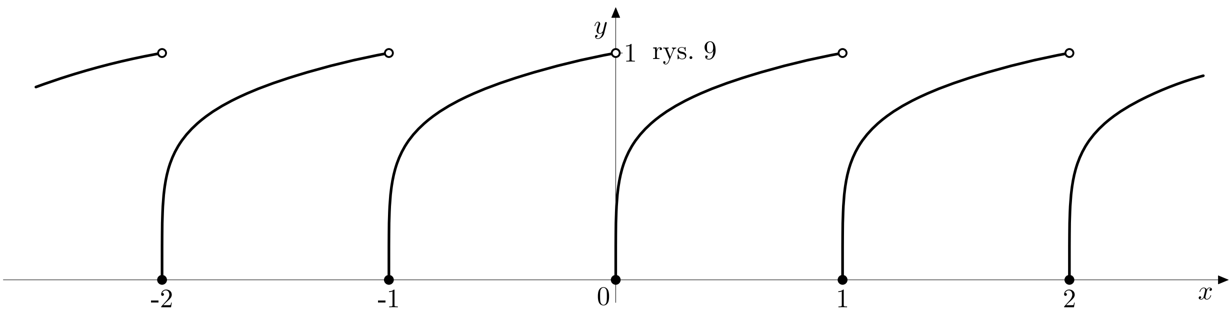


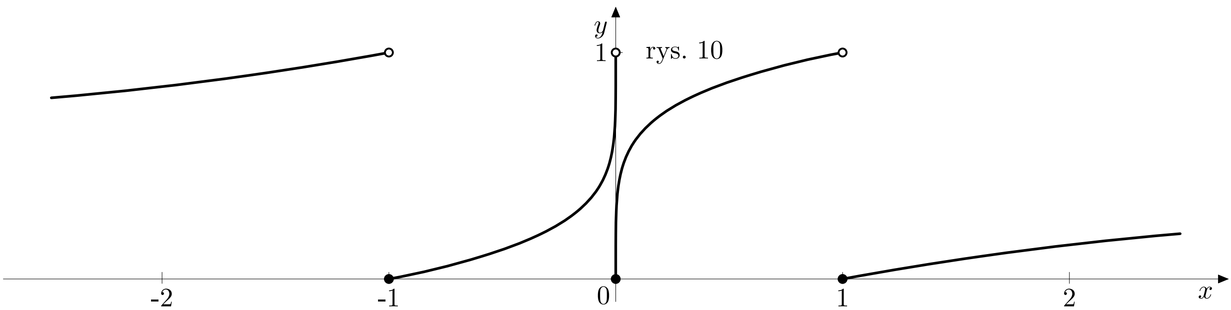
rys. 5


y
1
rys. 6
-2
-1
0
1
2
x


y
1
rys. 7
-2
-1
0
1
2
x


y
1
rys. 8
-2
-1
0
1
2
x


y
1
rys. 9
-2
-1
0
1
2
x


y
1
rys. 10
-2
-1
0
1
2
x