

W każdym¹ z poniższych zadań podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być podane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$261. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 60} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf Z = -1/11 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = 1/4 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$262. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 70} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf Z = -1/6 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = 1/11 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$263. Z = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf Z = 2 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = 12/5 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$264. Z = \left\{ \sqrt{25n^2 - 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf Z = -4 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = -12/5 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$265. Z = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} + \sqrt{25n^2 - 24n} - 10n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf Z = -2 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = 0 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$266. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16n^2 \leq 9m^2 \leq 25n^2 \right\}$$

$$\inf Z = 4/3 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = 5/3 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$267. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16n^2 \leq 2m^2 \leq 32n^2 \right\}$$

$$\inf Z = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$\sup Z = 4 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$268. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3n^2 \leq m^2 \leq 4n^2 \right\}$$

$$\inf Z = \sqrt{3} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$\sup Z = 2 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$269. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4m^2 \leq n^2 \leq 5m^2 \right\}$$

$$\inf Z = 1/\sqrt{5} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$\sup Z = 1/2 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$270. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^n \leq 2^m \leq 4^n \right\}$$

$$\inf Z = \log_2 3 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$\sup Z = 2 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$271. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^m \leq 2^n \leq 5^m \right\}$$

$$\inf Z = \log_5 2 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$\sup Z = 1/2 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$272. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 27^{n^2} \right\}$$

$$\inf Z = \sqrt{2} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$\sup Z = \sqrt{3} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

¹Nie ma sensu rozwiązywać wszystkich zadań, możesz pominąć zadania podobne do wcześniejszych.

$$273. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\}$$

inf $Z = 2$ Czy $\in Z$? **TAK**

sup $Z = \sqrt{5}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$274. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 9^{m^2} \leq 25^{n^2} \right\}$$

inf $Z = \sqrt{\log_9 16} = \sqrt{\log_3 4}$ Czy $\in Z$? **NIE**

sup $Z = \sqrt{\log_9 25} = \sqrt{\log_3 5}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$275. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \cdot n^m \leq m^m \leq 27^n \cdot n^m \right\}$$

inf $Z = 2$ Czy $\in Z$? **TAK**

sup $Z = 3$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$276. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{24n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{18n} \cdot n^m \right\}$$

inf $Z = 8$ Czy $\in Z$? **TAK**

sup $Z = 9$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$277. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8n} \cdot n^m \leq m^m \leq 2^{160n} \cdot n^m \right\}$$

inf $Z = 4$ Czy $\in Z$? **TAK**

sup $Z = 32$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$278. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{64n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{81n} \cdot n^m \right\}$$

inf $Z = 16$ Czy $\in Z$? **TAK**

sup $Z = 27$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$279. Z = \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

inf $Z = 1/100$ Czy $\in Z$? **TAK**

sup $Z = 9/25$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$280. Z = \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^3 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

inf $Z = -27/125$ Czy $\in Z$? **NIE**

sup $Z = 8/125$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$281. Z = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

inf $Z = -1$ Czy $\in Z$? **TAK**

sup $Z = 1/4$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$282. Z = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

inf $Z = -1$ Czy $\in Z$? **TAK**

sup $Z = 1/16$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$283. Z = \left\{ \left(-\frac{1}{n} \right)^{n^2+n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

inf $Z = 0$ Czy $\in Z$? **NIE**

sup $Z = 1$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$284. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 370} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

inf $Z = -1/5$ Czy $\in Z$? **TAK**

sup $Z = 1/6$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$285. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 390} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf Z = -1 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = 1/6 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$286. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 410} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf Z = 0 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$\sup Z = 1/10 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$287. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 430} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf Z = 0 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$\sup Z = 1/30 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$288. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\}$$

$$\inf Z = 5 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = \sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$289. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$$

$$\inf Z = \sqrt[3]{25} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$\sup Z = 3 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$290. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 8^m \leq 27^n \right\}$$

$$\inf Z = 4/3 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = \log_8 27 = \boxed{\log_2 3} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$291. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 9^m \leq 27^n \right\}$$

$$\inf Z = \log_9 16 = \boxed{\log_3 4 = 2 \cdot \log_3 2} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$\sup Z = 3/2 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$292. Z = \left\{ (2 - \sqrt{3})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf Z = 0 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{NIE}$$

$$\sup Z = 2 - \sqrt{3} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$293. Z = \left\{ (2 - \sqrt{5})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf Z = 2 - \sqrt{5} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = (2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$294. Z = \left\{ \binom{50}{n} : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$$

$$\inf Z = 1 \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = \binom{50}{25} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$295. Z = \left\{ \binom{50}{n} \cdot (-1)^n : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$$

$$\inf Z = -\binom{50}{25} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$\sup Z = \binom{50}{24} = \binom{50}{26} \quad \text{Czy } \in Z ? \quad \mathbf{TAK}$$

$$296. Z = \{\sqrt{x^2+2x+1} : x \in (-5, 2)\}$$

$\inf Z = 0$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 4$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$297. Z = \{\sqrt[4]{x^2+2x+1} : x \in (-5, 2)\}$$

$\inf Z = 0$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 2$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$298. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^3 \cdot n^{15} \leq m^{15} \leq 3^5 \cdot n^{15} \right\}$$

$\inf Z = \sqrt[5]{5}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = \sqrt[3]{3}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$299. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^2 \cdot n^{10} \leq m^{10} \leq 2^5 \cdot n^{10} \right\}$$

$\inf Z = \sqrt[5]{5}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = \sqrt{2}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$300. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^2 \cdot n^6 \leq m^6 \leq 2^3 \cdot n^6 \right\}$$

$\inf Z = +\infty$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = -\infty$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$301. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 8^{mn} \right\}$$

$\inf Z = \sqrt{2}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = 3$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$302. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 4^{mn} \right\}$$

$\inf Z = 2$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 2$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$303. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 81^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 11^{mn} \right\}$$

$\inf Z = 2$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = \log_3 11$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$304. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 5^{mn} \right\}$$

$\inf Z = \sqrt{3}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = \log_2 5$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$305. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 32^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 3^{mn} \right\}$$

$\inf Z = +\infty$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = -\infty$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$306. Z = \left\{ \frac{m^2}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$$

$\inf Z = 4$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 9$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$307. Z = \left\{ \frac{m^2}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^4 \leq m^4 \leq 49n^4 \right\}$$

$\inf Z = 5$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = 7$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$308. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{18^2 \cdot n} \cdot n^m \leq m^m \leq 2^{2^{11} \cdot n} \cdot n^m \right\}$$

$\inf Z = 81$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 256$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$309. Z = \{\log_x 8 : x \in [2, +\infty)\}$$

$\inf Z = 0$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = 3$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$310. Z = \{\log_x 32 : x \in (0, 1/2]\}$$

$\inf Z = -5$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 0$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$311. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf Z = -1/8$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 1/5$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$312. Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf Z = -1/45$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 1/48$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$313. Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf Z = -1/5$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 1/19$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$314. Z = \left\{ \left(\frac{-1}{3} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf Z = -1/3$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 1/9$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$315. Z = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf Z = 1/3$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 1/2$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$316. Z = \left\{ x^n : x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf Z = -1/2$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = 1/4$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$317. Z = \{\log_2(2n-1) - \log_2 n : n \in \mathbb{N}\}$$

$\inf Z = 0$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 1$ Czy $\in Z$? **NIE**

$$318. Z = \left\{ \frac{(\log_2(n^2+1)) \cdot \log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4)) \cdot \log_9(n^2+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf Z = 6$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 6$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$319. Z = \left\{ \frac{1}{5^m - 11^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf Z = -1/6$ Czy $\in Z$? **TAK**

$\sup Z = 1/4$ Czy $\in Z$? **TAK**

$$320. Z = \left\{ \frac{mn}{m^2 + 4n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf Z = 0$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z = 1/4$ Czy $\in Z$? **TAK**

321. Niech \mathbb{T} będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - 1| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **321.1-321.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

321.1. $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

321.2. $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

321.3. $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{3/2}$

321.4. $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{1/2}$

321.5. $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{5/6}$

321.6. $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{-5/6}$

321.7. $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{1/2}$

321.8. $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{-1/2}$

321.9. $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{4}$

321.10. $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

322. Niech \mathbb{T} będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left| a_n - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **322.1-322.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

322.1. $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

322.2. $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

322.3. $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{1}$

322.4. $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

322.5. $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{1}$

322.6. $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{-2/3}$

322.7. $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2/3}$

322.8. $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{-1/3}$

322.9. $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

322.10. $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

323. Niech \mathbb{T} będzie zbiorem wszystkich ciągów **zbieżnych** (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - 6| < \frac{n+1}{n}.$$

W każdym z zadań **323.1-323.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

323.1. $\sup \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 8$

323.2. $\inf \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 4$

323.3. $\sup \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 7,5 = 15/2 = 7\frac{1}{2}$

323.4. $\inf \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 4,5 = 9/2 = 4\frac{1}{2}$

323.5. $\sup \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = 3,5 = 7/2 = 3\frac{1}{2}$

323.6. $\inf \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = -3,5 = -7/2 = -3\frac{1}{2}$

323.7. $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = 7$

323.8. $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = 5$

323.9. $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = 3$

323.10. $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = -3$

324. W każdym z zadań **324.1-324.6** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Niech \mathbb{T} będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n}.$$

324.1. $A = \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf A = -\infty$

$\sup A = +\infty$

324.2. $B = \{a_3 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf B = -3/2$

$\sup B = 3/2$

324.3. $C = \{a_4 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf C = -5/6$

$\sup C = 5/6$

324.4. $D = \{a_4 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf D = -11/6$

$\sup D = 11/6$

324.5. $E = \{(a_3 - a_1)^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf E = 0$

$\sup E = 9/4$

324.6. $F = \{a_3^2 - a_1^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf F = -\infty$

$\sup F = +\infty$

325. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z = \left\{ \frac{mn}{4m^2 + 9n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania oprzemy na następujących spostrzeżeniach:

1° Wszystkie elementy zbioru Z są dodatnie.

2° Istnieje ciąg o wyrazach ze zbioru Z zbieżny do zera.

Dla dowodu tego spostrzeżenia wystarczy przyjąć $m = 1$ w wyrażeniu

$$\frac{mn}{4m^2 + 9n^2}. \quad (\heartsuit)$$

Otrzymamy wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4 + 9n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 \cdot n^{-1} + 9n} = 0.$$

3° Liczba $1/12$ jest elementem zbioru Z .

Aby to zobaczyć, wystarczy podstawić $m = 3$ i $n = 2$ w (\heartsuit) .

4° Każdy element zbioru Z jest nie większy od $1/12$.

Istotnie, z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $4m^2$ i $9n^2$ otrzymujemy

$$\sqrt{4m^2 \cdot 9n^2} \leq \frac{4m^2 + 9n^2}{2},$$

co łatwo przekształcamy do postaci

$$\frac{mn}{4m^2 + 9n^2} \leq \frac{1}{12}.$$

Na podstawie spostrzeżeń 1° i 2° stwierdzamy, że $\inf Z = 0$, a ze spostrzeżeń 3° i 4° wynika $\sup Z = 1/12$.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny $1/12$.

326. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowanej do liczb $8k^3$, $27m^3$, $125n^3$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{8k^3 \cdot 27m^3 \cdot 125n^3} \leq \frac{8k^3 + 27m^3 + 125n^3}{3},$$

czyli

$$\frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} \leq \frac{1}{90}.$$

Zatem liczba $1/90$ jest ograniczeniem górnym zbioru Z . Wykażemy, że jest to ograniczenie najmniejsze. W tym celu przyjmijmy $k = 15$, $m = 10$ oraz $n = 6$. Wówczas

$$\frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} = \frac{900}{27000 + 27000 + 27000} = \frac{1}{90}$$

jest elementem zbioru Z .

Odpowiedź: Kres górny zbioru Z jest równy $1/90$.

327. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 5n + 3} - n &= \sqrt{n^2 + 5n + 3} - \left(n + \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2} = \frac{n^2 + 5n + 3 - \left(n + \frac{5}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 3} + \left(n + \frac{5}{2}\right)} + \frac{5}{2} = \\ &= \frac{n^2 + 5n + 3 - n^2 - 5n - \frac{25}{4}}{\sqrt{n^2 + 5n + 3} + \left(n + \frac{5}{2}\right)} + \frac{5}{2} = -\frac{13/4}{\sqrt{n^2 + 5n + 3} + \left(n + \frac{5}{2}\right)} + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie rośnie wraz z n , a przy $n \rightarrow \infty$ dąży do $5/2$.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu rosnącym pierwszy wyraz (tu równy 2) jest najmniejszy, a kresem górnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 2, a kres górny $5/2$.

328. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 10} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 5n + 10} - n &= \sqrt{n^2 + 5n + 10} - \left(n + \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2} = \frac{n^2 + 5n + 10 - \left(n + \frac{5}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 10} + \left(n + \frac{5}{2}\right)} + \frac{5}{2} = \\ &= \frac{n^2 + 5n + 10 - n^2 - 5n - \frac{25}{4}}{\sqrt{n^2 + 5n + 10} + \left(n + \frac{5}{2}\right)} + \frac{5}{2} = \frac{15/4}{\sqrt{n^2 + 5n + 10} + \left(n + \frac{5}{2}\right)} + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie maleje wraz z n , a przy $n \rightarrow \infty$ dąży do $5/2$.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu malejącym pierwszy wyraz (tu równy 3) jest największy, a kresem dolnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $5/2$, a kres górny 3.

329. Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{5^m - 3^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = 5^m - 3^n > 0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k . Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia i parzysta, musi zachodzić $k \geq 2$. Zauważmy przy tym, że dla $m = n = 1$ w istocie $k = 2$. Zatem liczba $1/2$ jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = 5^m - 3^n < 0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k . Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna i parzysta, musi zachodzić $k \leq -2$. Zauważmy przy tym, że dla $m = 2, n = 3$ w istocie $k = 25 - 27 = -2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny $1/2$.

330. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 3n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = m^2 - 3n^2 > 0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k . Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k \geq 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m = 2$ i $n = 1$ w istocie $k = 1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = m^2 - 3n^2 < 0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k , czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k \not\equiv 2 \pmod{3}$, musi zachodzić $k \neq -1$. W konsekwencji $k \leq -2$. Zauważmy ponadto, że dla $m = n = 1$ otrzymujemy $k = -2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: *Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 3 reszty 2*. Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że

$$k = m^2 - 3n^2 \equiv m^2 \not\equiv 2 \pmod{3}.$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny 1.

331. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 7n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = m^2 - 7n^2 > 0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k . Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k \geq 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m = 8$ i $n = 3$ w istocie $k = 1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k = m^2 - 7n^2 < 0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k , czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k \not\equiv 6 \pmod{7}$ oraz $k \not\equiv 5 \pmod{7}$, musi zachodzić $k \neq -1$ oraz $k \neq -2$. W konsekwencji $k \leq -3$. Zauważmy ponadto, że dla $m = 2$ i $n = 1$ otrzymujemy $k = -3$. Zatem liczba $-1/3$ jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: *Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 7 reszty 3, 5 ani 6.* Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że

$$k = m^2 - 7n^2 \equiv m^2 \not\equiv 5 \pmod{7}$$

oraz

$$k = m^2 - 7n^2 \equiv m^2 \not\equiv 6 \pmod{7}.$$

Dowód powyższego faktu sprowadza się do następujących tożsamości:

$$\begin{aligned} (7t)^2 &= 7 \cdot (7t^2) + 0, \\ (7t \pm 1)^2 &= 7 \cdot (7t^2 \pm 2t) + 1, \\ (7t \pm 2)^2 &= 7 \cdot (7t^2 \pm 4t) + 4, \\ (7t \pm 3)^2 &= 7 \cdot (7t^2 \pm 6t + 1) + 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/3$, a kres górny 1.