

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 14.11.2024  
i części ćwiczeń w poniedziałek 18.11.2024.**

**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!**

### 7. Kresy zbiorów.

W każdym<sup>1</sup> z poniższych zadań podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być podane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$261. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 60} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$262. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 70} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$263. Z = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$264. Z = \left\{ \sqrt{25n^2 - 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$265. Z = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} + \sqrt{25n^2 - 24n} - 10n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$266. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16n^2 \leq 9m^2 \leq 25n^2 \right\}$$

$$267. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16n^2 \leq 2m^2 \leq 32n^2 \right\}$$

$$268. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3n^2 \leq m^2 \leq 4n^2 \right\}$$

$$269. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4m^2 \leq n^2 \leq 5m^2 \right\}$$

$$270. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^n \leq 2^m \leq 4^n \right\}$$

$$271. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^m \leq 2^n \leq 5^m \right\}$$

$$272. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 9^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 27^{n^2} \right\}$$

---

<sup>1</sup>Nie ma sensu rozwiązywać wszystkich zadań, możesz pominąć zadania podobne do wcześniejszych.

$$273. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 32^{n^2} \right\}$$

$$274. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 9^{m^2} \leq 25^{n^2} \right\}$$

$$275. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \cdot n^m \leq m^m \leq 27^n \cdot n^m \right\}$$

$$276. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{24n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{18n} \cdot n^m \right\}$$

$$277. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{8n} \cdot n^m \leq m^m \leq 2^{160n} \cdot n^m \right\}$$

$$278. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{64n} \cdot n^m \leq m^m \leq 3^{81n} \cdot n^m \right\}$$

$$279. Z = \left\{ \left( \frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$280. Z = \left\{ \left( \frac{1}{n} - \frac{3}{5} \right)^3 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$281. Z = \left\{ \left( -\frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$282. Z = \left\{ \left( -\frac{1}{n} \right)^{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$283. Z = \left\{ \left( -\frac{1}{n} \right)^{n^2+n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$284. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 370} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$285. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 390} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$286. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 410} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$287. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 40n + 430} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$288. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\}$$

$$289. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$$

$$290. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 8^m \leq 27^n \right\}$$

$$291. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^n \leq 9^m \leq 27^n \right\}$$

$$292. Z = \left\{ (2 - \sqrt{3})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$293. Z = \left\{ (2 - \sqrt{5})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$294. Z = \left\{ \binom{50}{n} : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$$

$$295. Z = \left\{ \binom{50}{n} \cdot (-1)^n : n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \right\}$$

$$296. Z = \left\{ \sqrt{x^2 + 2x + 1} : x \in (-5, 2) \right\}$$

$$297. Z = \left\{ \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} : x \in (-5, 2) \right\}$$

$$298. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^3 \cdot n^{15} \leq m^{15} \leq 3^5 \cdot n^{15} \right\}$$

$$299. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 5^2 \cdot n^{10} \leq m^{10} \leq 2^5 \cdot n^{10} \right\}$$

$$300. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^2 \cdot n^6 \leq m^6 \leq 2^3 \cdot n^6 \right\}$$

$$301. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 8^{mn} \right\}$$

$$302. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 4^{mn} \right\}$$

$$303. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 81^{n^2} \leq 3^{m^2} \leq 11^{mn} \right\}$$

$$304. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 5^{mn} \right\}$$

$$305. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 32^{n^2} \leq 2^{m^2} \leq 3^{mn} \right\}$$

$$306. Z = \left\{ \frac{m^2}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 8n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$$

$$307. Z = \left\{ \frac{m^2}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^4 \leq m^4 \leq 49n^4 \right\}$$

$$308. Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{18^2 \cdot n} \cdot n^m \leq m^m \leq 2^{2^{11} \cdot n} \cdot n^m \right\}$$

$$309. Z = \{\log_x 8 : x \in [2, +\infty)\}$$

$$310. Z = \{\log_x 32 : x \in (0, 1/2]\}$$

$$311. Z = \left\{ \frac{1}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$312. Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$313. Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 44} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$314. Z = \left\{ \left( \frac{-1}{3} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$315. Z = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$316. Z = \left\{ x^n : x \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$317. Z = \{\log_2(2n-1) - \log_2 n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$318. Z = \left\{ \frac{(\log_2(n^2+1)) \cdot \log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4)) \cdot \log_9(n^2+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$319. Z = \left\{ \frac{1}{5^m - 11^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$320. Z = \left\{ \frac{mn}{m^2 + 4n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

**321.** Niech  $\mathbb{T}$  będzie zbiorem wszystkich ciągów  $(a_n)$  spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - 1| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **321.1-321.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

**321.1.**  $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**321.2.**  $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**321.3.**  $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**321.4.**  $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**321.5.**  $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**321.6.**  $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**321.7.**  $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**321.8.**  $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**321.9.**  $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**321.10.**  $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**322.** Niech  $\mathbb{T}$  będzie zbiorem wszystkich ciągów  $(a_n)$  spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left| a_n - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

W każdym z zadań **322.1-322.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

**322.1.**  $\sup\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**322.2.**  $\inf\{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**322.3.**  $\sup\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**322.4.**  $\inf\{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**322.5.**  $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**322.6.**  $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**322.7.**  $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**322.8.**  $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**322.9.**  $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**322.10.**  $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**323.** Niech  $\mathbb{T}$  będzie zbiorem wszystkich ciągów **zbieżnych**  $(a_n)$  spełniających warunki

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - 6| < \frac{n+1}{n}.$$

W każdym z zadań **323.1-323.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

**323.1.**  $\sup \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**323.2.**  $\inf \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**323.3.**  $\sup \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**323.4.**  $\inf \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**323.5.**  $\sup \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**323.6.**  $\inf \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \dots\dots\dots$

**323.7.**  $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$

**323.8.**  $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$

**323.9.**  $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$

**323.10.**  $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \dots\dots\dots$

**324.** W każdym z zadań **324.1-324.6** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Niech  $\mathbb{T}$  będzie zbiorem wszystkich ciągów  $(a_n)$  spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n}.$$

---

**324.1.**  $A = \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf A = \dots\dots\dots \sup A = \dots\dots\dots$

---

**324.2.**  $B = \{a_3 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf B = \dots\dots\dots \sup B = \dots\dots\dots$

---

**324.3.**  $C = \{a_4 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf C = \dots\dots\dots \sup C = \dots\dots\dots$

---

**324.4.**  $D = \{a_4 - a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf D = \dots\dots\dots \sup D = \dots\dots\dots$

---

**324.5.**  $E = \{(a_3 - a_1)^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$

---

**324.6.**  $F = \{a_3^2 - a_1^2 : (a_n) \in \mathbb{T}\}$

$\inf F = \dots\dots\dots \sup F = \dots\dots\dots$

---

**325.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z = \left\{ \frac{mn}{4m^2 + 9n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**326.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**327.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**328.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 10} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**329.** Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{5^m - 3^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**330.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 3n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**331.** Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{ \frac{1}{m^2 - 7n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$