**235!** Ciąg $(a_n)$ spełnia warunek

$$\underset{\varepsilon\geqslant 1}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n-1|\leqslant\varepsilon\ .$$

Czy stąd wynika, że

**235.1** ciąg $(a_n)$ jest zbieżny **NIE**

**235.2** ciąg $(a_n)$ jest rozbieżny **NIE**

**235.3** ciąg $(a_n)$ jest ograniczony **TAK**

**235.4** wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)$ są dodatnie **NIE**

**235.5** wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)$ są nieujemne **NIE**

**235.6** od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)$ są dodatnie **NIE**

**235.7** od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)$ są nieujemne **TAK**

**235.8** w ciągu $(a_n)$ występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich **NIE**

**235.9** w ciągu $(a_n)$ występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych **TAK**

**235.10** w ciągu $(a_n)$ występuje co najmniej jeden wyraz dodatni **NIE**

**235.11** w ciągu $(a_n)$ występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny **TAK**

**235.12** $\underset{n}{\forall}\ a_n>0$ **NIE**

**235.13** $\underset{n}{\forall}\ a_n\geqslant 0$ **NIE**

**235.14** $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n>0$ **NIE**

**235.15** $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n\geqslant 0$ **TAK**

**235.16** $\underset{N}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\exists}\ a_n>0$ **NIE**

**235.17** $\underset{N}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\exists}\ a_n\geqslant 0$ **TAK**

**235.18** $\underset{n}{\exists}\ a_n>0$ **NIE**

**235.19** $\underset{n}{\exists}\ a_n\geqslant 0$ **TAK**

**236.** W każdym[1] z zadań **236.1–236.11** podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

**236.1.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}=\mathbf{3/2}$

**236.2.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=\mathbf{7/6}$

**236.3.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=\mathbf{7/4}$

**236.4.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=\mathbf{9/8}$

**236.5.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=\mathbf{21/16}$

**236.6.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+3+9+27+\ldots+3^k+\ldots+9^n}{1+9+81+729+\ldots+9^k+\ldots+9^n}=\mathbf{4/3}$

**236.7.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+5+25+125+\ldots+5^k+\ldots+25^n}{1+25+625+\ldots+25^k+\ldots+25^n}=\mathbf{6/5}$

**236.8.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+3+9+27+\ldots+3^k+\ldots+27^n}{1+27+729+\ldots+27^k+\ldots+27^n}=\mathbf{13/9}$

**236.9.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+5+25+125+\ldots+5^k+\ldots+125^n}{1+125+15625+\ldots+125^k+\ldots+125^n}=\mathbf{31/25}$

**236.10.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+16^n}{1+16+256+\ldots+16^k+\ldots+16^n}=\mathbf{15/8}$

**236.11.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+3+9+27+\ldots+3^k+\ldots+81^n}{1+81+6561+\ldots+81^k+\ldots+81^n}=\mathbf{40/27}$

[1] Nie ma sensu rozwiązywać wszystkich 11 zadań, jeśli w którymś momencie uznasz, że już umiesz rozwiązywać tego typu zadania.

**244.** (Wzorcowy przykład z rozwiązaniem) Dane są takie ciągi $(a_n)$ i $(b_n)$, że

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall}\ \underset{n\geqslant 3/\varepsilon_1}{\forall} |a_n-2|<\varepsilon_1 \qquad \text{oraz} \qquad \underset{\varepsilon_2>0}{\forall}\ \underset{n\geqslant 7/\varepsilon_2}{\forall} |b_n-3|<\varepsilon_2 \,.$$

Niech $c_n=a_n+b_n$. Wskaż liczby $r\in\mathbb{N}$ oraz $P\in\{10, 14\}$ i udowodnij, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n\geqslant P/\varepsilon}{\forall} |c_n-r|<\varepsilon \,.$$

- $P=14$ (wersja łatwiejsza).
- $P=10$ (wersja trudniejsza **dla ambitnych**).

*Rozwiązanie:*

Ciągi $(a_n)$ oraz $(b_n)$ są zbieżne odpowiednio do granic 2 i 3. Zatem ciąg $(c_n)$ jest zbieżny do sumy granic równej $r=5$.

Niech $\varepsilon$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią.

Przyjmując $\varepsilon_1=\varepsilon/2$ oraz $\varepsilon_2=\varepsilon/2$ otrzymujemy odpowiednio

$$\underset{n\geqslant 6/\varepsilon}{\forall} |a_n-2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

i

$$\underset{n\geqslant 14/\varepsilon}{\forall} |b_n-3|<\frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Stąd wynika, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 14/\varepsilon$ zachodzą nierówności

$$|c_n-5|=|a_n-2+b_n-3|\leqslant|a_n-2|+|b_n-3|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \,,$$

co kończy rozwiązanie z $P=14$ (wersja łatwiejsza).

Przyjmując $\varepsilon_1=3\varepsilon/10$ oraz $\varepsilon_2=7\varepsilon/10$ otrzymujemy odpowiednio

$$\underset{n\geqslant 10/\varepsilon}{\forall} |a_n-2|<\frac{3\varepsilon}{10}$$

i

$$\underset{n\geqslant 10/\varepsilon}{\forall} |b_n-3|<\frac{7\varepsilon}{10} \,.$$

Stąd wynika, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 10/\varepsilon$ zachodzą nierówności

$$|c_n-5|=|a_n-2+b_n-3|\leqslant|a_n-2|+|b_n-3|<\frac{3\varepsilon}{10}+\frac{7\varepsilon}{10}=\varepsilon \,,$$

co kończy rozwiązanie z $P=10$ (wersja trudniejsza).