Kolokwium nr 3: środa 13.11.2024, godz. 8:30-10:00, materiał zad. 1–260.

Zadania do omówienia na części ćwiczeń w poniedziałek 4.11.2024 i ćwiczeniach w czwartek 7.11.2024.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

W pierwszej kolejności należy omówić zadania z wykrzyknikiem.

6. Ciągi (c.d.).

229! Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\underset{n>1000}{\forall} |a_n - 100| < 10\,.$$

Czy stąd wynika, że

a) ciąg (a_n) jest zbieżny,

b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,

c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,

d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,

e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,

f) $a_{666} < 7777777$,

g) $a_{1111} > 88$,

h) $\underset{n>1729}{\forall} |a_n - 100| < 1\,,$

i) $\underset{n>345}{\forall} |a_n - 100| < 17\,,$

j) $\underset{n>5555}{\forall} |a_n - 99| < 13\,,$

k) ciąg (a_n) jest ograniczony,

l) $\underset{n>444}{\exists} |a_n - 95| < 37\,,$

m) $\underset{n>4444}{\exists} |a_n - 80| < 37\,,$

n) $\underset{n<444}{\exists} |a_n - 95| < 37\,,$

o) $\underset{n<4444}{\exists} |a_n - 80| < 37\,,$

p) $\underset{m}{\forall}\ \underset{n>m}{\exists}\ a_n > 0\,,$

q) $\underset{n>1331}{\forall} |a_n - 66| > 12\,,$

r) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall} |a_n - a_m| < 7\,,$

s) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall} |a_n - a_m| < 17\,,$

t) $\underset{m>123}{\forall}\ \underset{n>45678}{\forall} |a_n - a_m| < 27\,,$

u) $\underset{m>1234}{\forall}\ \underset{n>5678}{\forall} |a_n - a_m| < 37\,,$

v) $\underset{m<123}{\exists}\ \underset{n<456}{\exists} |a_n - a_m| < 3\,,$

w) $\underset{m>12345}{\forall}\ \underset{n>67890}{\forall}\ |a_n+a_m|<210\,,$

x) $\underset{m>1296}{\forall}\ \underset{n>7776}{\forall}\ |a_n+a_m|<222\,,$

y) $\underset{m>1024}{\forall}\ \underset{n>8192}{\forall}\ |a_n+a_m|>128\,,$

z) $\underset{n}{\exists}\ a_n<92\,,$

ź) $\underset{n}{\exists}\ a_n>91\,,$

ż) $\underset{m}{\exists}\ \underset{n\neq m}{\exists}\ |a_n-a_m|<10^{-1000000}\,.$

230! Dany jest taki ciąg (a_n), że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\quad \underset{n\geqslant 5/\varepsilon}{\forall} |a_n-7|<\varepsilon\ .$$

Podaj granicę ciągu (a_n).
Wskaż taką liczbę M, że $\underset{n}{\forall}|a_n|<M$.
Wskaż taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} a_n>6$.
Wskaż taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} a_n<7{,}01$.
Wskaż taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} |a_n-8|>1/3$.

231! Dany jest taki ciąg (b_n), że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\quad \underset{n\geqslant 10/\varepsilon}{\forall} |b_n+2|<\varepsilon\ .$$

Podaj granicę ciągu (b_n).
Wskaż taką liczbę M, że $\underset{n}{\forall}|b_n|<M$.
Wskaż taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} b_n<0$.
Wskaż taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} b_n>-3$.
Wskaż taką liczbę N, że $\underset{n\geqslant N}{\forall} |b_n-2|>1/10$.

232! Niech $c_n=a_n+b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są ciągami z poprzednich dwóch zadań. Udowodnij[1], że wówczas ciąg (c_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\quad \underset{n\geqslant \ldots\ldots\ldots/\varepsilon}{\forall} |c_n-5|<\varepsilon\ .$$

W miejscu kropek powinna się znaleźć odpowiednio dobrana liczba.

233! Niech $d_n=2a_n+3b_n$. Udowodnij, że wówczas ciąg (d_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\quad \underset{n\geqslant \ldots\ldots\ldots/\varepsilon}{\forall} |d_n-\ldots\ldots|<\varepsilon\ .$$

W miejscu kropek powinny się znaleźć odpowiednio dobrane liczby.

[1] W razie problemów zerknij najpierw na zadanie **244.**

234! (DLA AMBITNYCH) Niech $e_n = a_n \cdot b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są jak poprzednio. Udowodnij, że wówczas ciąg (e_n) jest zbieżny, gdyż

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{n\geqslant \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\forall} \quad |e_n+14|<\varepsilon \ .$$

W miejscu kropek powinno się znaleźć odpowiednio dobrane wyrażenie zależne od ε.

235! Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\underset{\varepsilon\geqslant 1}{\forall} \ \underset{N}{\exists} \ \underset{n\geqslant N}{\forall} \ |a_n-1|\leqslant\varepsilon \ .$$

Czy stąd wynika, że

235.1 ciąg (a_n) jest zbieżny ....

235.2 ciąg (a_n) jest rozbieżny ....

235.3 ciąg (a_n) jest ograniczony ....

235.4 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie ....

235.5 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne ....

235.6 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie ....

235.7 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne ....

235.8 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich ....

235.9 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych ....

235.10 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz dodatni ....

235.11 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny ....

235.12 $\underset{n}{\forall} \ a_n>0$ ....

235.13 $\underset{n}{\forall} \ a_n\geqslant 0$ ....

235.14 $\underset{N}{\exists} \ \underset{n\geqslant N}{\forall} \ a_n>0$ ....

235.15 $\underset{N}{\exists} \ \underset{n\geqslant N}{\forall} \ a_n\geqslant 0$ ....

235.16 $\underset{N}{\forall} \ \underset{n\geqslant N}{\exists} \ a_n>0$ ....

235.17 $\underset{N}{\forall} \ \underset{n\geqslant N}{\exists} \ a_n\geqslant 0$ ....

235.18 $\underset{n}{\exists} \ a_n>0$ ....

235.19 $\underset{n}{\exists} \ a_n\geqslant 0$ ....

236. W każdym[2] z zadań **236.1–236.11** podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

236.1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}=$ ....

236.2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=$ ....

236.3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=$ ....

236.4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=$ ....

236.5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=$ ....

236.6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+3+9+27+\ldots+3^k+\ldots+9^n}{1+9+81+729+\ldots+9^k+\ldots+9^n}=$ ....

236.7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+5+25+125+\ldots+5^k+\ldots+25^n}{1+25+625+\ldots+25^k+\ldots+25^n}=$ ....

236.8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+3+9+27+\ldots+3^k+\ldots+27^n}{1+27+729+\ldots+27^k+\ldots+27^n}=$ ....

236.9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+5+25+125+\ldots+5^k+\ldots+125^n}{1+125+15625+\ldots+125^k+\ldots+125^n}=$ ....

236.10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+16^n}{1+16+256+\ldots+16^k+\ldots+16^n}=$ ....

236.11. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+3+9+27+\ldots+3^k+\ldots+81^n}{1+81+6561+\ldots+81^k+\ldots+81^n}=$ ....

PRAWDA CZY FAŁSZ?

237! Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg (a_n+b_n) jest rozbieżny.

238! Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg (a_n+b_n) jest rozbieżny.

239! Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg (a_nb_n) jest rozbieżny.

240! Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg (a_nb_n) jest rozbieżny.

[2] Nie ma sensu rozwiązywać wszystkich 11 zadań, jeśli w którymś momencie uznasz, że już umiesz rozwiązywać tego typu zadania.

241! Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.

242! Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodanie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

243! Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

244. (Wzorcowy przykład z rozwiązaniem) Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n), że

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall}\ \underset{n\geqslant 3/\varepsilon_1}{\forall} |a_n-2|<\varepsilon_1 \qquad \text{oraz} \qquad \underset{\varepsilon_2>0}{\forall}\ \underset{n\geqslant 7/\varepsilon_2}{\forall} |b_n-3|<\varepsilon_2\,.$$

Niech $c_n=a_n+b_n$. Wskaż liczby $r\in\mathbb{N}$ oraz $P\in\{10,14\}$ i udowodnij, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n\geqslant P/\varepsilon}{\forall} |c_n-r|<\varepsilon\,.$$

- $P=14$ (wersja łatwiejsza).
- $P=10$ (wersja trudniejsza **dla ambitnych**).

Rozumienie i analizowanie wybranych napisów matematycznych.

Zapisz podany zbiór używając przedziałów, zbioru liczb wymiernych oraz działań na zbiorach. $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ jest zbiorem liczb naturalnych.

245. $\left\{x^2 : x\in(-2,1]\right\}$

246. $\left\{x^3 : x\in(-2,1]\right\}$

247. $\left\{x^2+y^3 : x,y\in(-2,1]\right\}$

248. $\left\{x^3+y^4 : x,y\in(-2,1]\right\}$

249. $\{xy : x,y\in(-2,1]\}$

250. $\left\{xy^2 : x,y\in(-2,1]\right\}$

251. $\left\{\sqrt{(x-5)^2} : x\in(2,7]\right\}$

252. $\left\{\sqrt[3]{(x-5)^3} : x\in(2,7]\right\}$

253. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge m^2\geqslant 2n^2\right\}$

254. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge m^2\geqslant 4n^2\right\}$

255. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge m^3\leqslant 5n^3\right\}$

256. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge m^3\leqslant 8n^3\right\}$

257. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8n^2\leqslant m^2\leqslant 9n^2\right\}$

258. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8n^3\leqslant m^3\leqslant 9n^3\right\}$

259. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 3^n\leqslant 2^m\leqslant 4^n\right\}$

260. $\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 8^n\leqslant 4^m\leqslant 9^n\right\}$