Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 31.10.2024 i części ćwiczeń w poniedziałek 4.11.2024.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

W pierwszej kolejności należy omówić zadania z wykrzyknikiem.

5. Twierdzenie o trzech ciągach.

201. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3}+\frac{n}{n^3+1}+\frac{n}{n^3+2}+\frac{n}{n^3+3}+\frac{n}{n^3+4}+\frac{n}{n^3+5}+\frac{n}{n^3+6}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^3}\right).$$

202. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^5+1}{\sqrt{18n^{18}+1}}+\frac{5n^5+2}{\sqrt{18n^{18}+2}}+\frac{5n^5+3}{\sqrt{18n^{18}+3}}+\frac{5n^5+4}{\sqrt{18n^{18}+4}}+\ldots+\frac{5n^5+4n^4}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}}\right).$$

203! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^7+n^4}+\frac{n^4+1}{n^7+n^4+1}+\frac{n^4+2}{n^7+n^4+2}+\frac{n^4+3}{n^7+n^4+3}+\frac{n^4+4}{n^7+n^4+4}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^7+(n+1)^4}\right).$$

204! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}}+\frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}}+\frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}\right).$$

205. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}}+\frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}}+\frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}}+\ldots+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}\right).$$

206. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n^2+n)^2+2n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{(n^2+n)^2+3n^2}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+4)^2-4}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-2n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2-2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}}\right).$$

207! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+2}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+3}-n^2}+\ldots\right.$$

$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k}-n^2}+\ldots$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-2}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-1}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n}-n^2}\right).$$

208! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+4}+\sqrt[3]{n^2+8}+\sqrt[3]{n^2+12}+\sqrt[3]{n^2+16}+\sqrt[3]{n^2+20}+\ldots+\sqrt[3]{(n+2)^2}}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+3}+\sqrt[3]{n^2+6}+\sqrt[3]{n^2+9}+\sqrt[3]{n^2+12}+\sqrt[3]{n^2+15}+\ldots+\sqrt[3]{(n+3)^2}}.$$

209! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^7+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^7+4}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+3}}{n^7+9}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+4}}{n^7+16}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+5}}{n^7+25}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7+n^6}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

210! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^p+1}{\sqrt{900n^{900}+1}}+\frac{n^p+8}{\sqrt{900n^{900}+32}}+\ldots+\frac{n^p+k^3}{\sqrt{900n^{900}+k^5}}+\ldots+\frac{n^p+8n^{18}}{\sqrt{900n^{900}+32n^{30}}}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru p, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

211. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+4}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+9}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+16}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+n^8}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

212. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+2}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+3}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+4}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+n^5}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

213! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^k+n^4}+\frac{n^4+1}{n^k+n^4+1}+\frac{n^4+2}{n^k+n^4+2}+\frac{n^4+3}{n^k+n^4+3}+\frac{n^4+4}{n^k+n^4+4}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^k+(n+1)^4}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

214! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{n^3}\frac{\sqrt{n^p+k}}{n^7+k^2}$$

dobierając tak wartość parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

215! a) Dobrać takie liczby całkowite $A>0$ i $B>1$, aby zadanie **b)** miało sens.
b) Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla A i B dobranych w zadaniu **a)**.

216. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+3)^2}+\frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+3)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+3)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+3)^2+6}+\frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+3)^2+8}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-6}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>3$, aby zadanie miało sens.

217! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+B)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+B)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+B)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+B)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+12}}{(n+B)^2+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+6)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+6)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+6)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B<6$, aby zadanie miało sens.

218! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2}}+\frac{n^2+5}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2}}+\frac{n^2+10}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+4}}+\frac{n^2+15}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+6}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+5k}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2k}}+\ldots+\frac{(n+10)^2-10}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2-4}}+\frac{(n+10)^2-5}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2-2}}+\frac{(n+10)^2}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2}}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich $A<B$, aby zadanie miało sens.

219. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+1)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+1)^2+6}+\frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+1)^2+9}+\frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+1)^2+12}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-9}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-6}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>1$, aby zadanie miało sens.

220. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>2$, aby zadanie miało sens.

221. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2}+\frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A<B$, aby zadanie miało sens.

222! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+n+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}}\right).$$

223! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^4+4n}}+\frac{4n+3}{\sqrt{4n^4+4n+3}}+\frac{4n+6}{\sqrt{4n^4+4n+6}}+\frac{4n+9}{\sqrt{4n^4+4n+9}}+\frac{4n+12}{\sqrt{4n^4+4n+12}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{13n-9}{\sqrt{4n^4+13n-9}}+\frac{13n-6}{\sqrt{4n^4+13n-6}}+\frac{13n-3}{\sqrt{4n^4+13n-3}}+\frac{13n}{\sqrt{4n^4+13n}}\right).$$

224! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{3^n+1}+\frac{3^{n-1}\cdot 2}{3^n+2}+\frac{3^{n-2}\cdot 4}{3^n+4}+\frac{3^{n-3}\cdot 8}{3^n+8}+\ldots+\frac{9\cdot 2^{n-2}}{3^n+2^{n-2}}+\frac{3\cdot 2^{n-1}}{3^n+2^{n-1}}+\frac{2^n}{3^n+2^n}\right).$$

225! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\right).$$

226! Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{(n+2)^2}{\sqrt{n^6+2}}+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+3}}+\ldots+\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{\sqrt{n^6+n-1}}+\frac{(2n)^2}{\sqrt{n^6+n}}\right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

227! Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+1}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+9}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+27}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^{n-1}}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}\right).$$

228! Obliczyć granicę ciągu zaczynającego się od wyrazu o indeksie 7:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}}+\frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}}+\frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}}+\frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}}+\ldots+\frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}}+\frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}}\right)$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.