190! Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^6+n^5+1}-n^3}{\sqrt[4]{n^6+n^5+1}-n^2}\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ w liczniku ułamka pod znakiem granicy występuje różnica wyrażeń podobnej wielkości ($\approx n^3$), stosujemy na poziomie licznika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,.$$

Ponieważ w mianowniku tegoż ułamka występuje różnica wyrażeń **różnego rzędu wielkości** $\left(\approx n^{3/2}\text{ oraz }\approx n^2\right)$, stosowanie jakiegokolwiek wzoru skróconego mnożenia jest zbyteczne, a nawet szkodliwe, bo prowadzi do skomplikowania rachunków.

Otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^6+n^5+1}-n^3}{\sqrt[4]{n^6+n^5+1}-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^6+n^5+1-n^6}{\left(\sqrt[4]{n^6+n^5+1}-n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^6+n^5+1}+n^3\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+1}{\left(\sqrt[4]{n^6+n^5+1}-n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^6+n^5+1}+n^3\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^{-5}}{\left(\sqrt[4]{n^{-2}+n^{-3}+n^{-8}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-1}+n^{-6}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1+0}{\left(\sqrt[4]{0+0+0}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+0+0}+1\right)}=-\frac{1}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-1/2$.

191. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^{16}+n^3}-n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16}+n^5}-n^8\right)^5}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^{16}+n^3}-n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16}+n^5}-n^8\right)^5}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{\sqrt{n^{16}+n^3}+n^8}\right)^3\cdot\left(\frac{\sqrt{n^{16}+n^5}+n^8}{n^5}\right)^5=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{-5}}{\sqrt{1+n^{-13}}+1}\right)^3\cdot\left(\frac{\sqrt{1+n^{-11}}+1}{n^{-3}}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^3}\cdot\frac{n^{-15}}{n^{-15}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^3}=\frac{\left(\sqrt{1+0}+1\right)^5}{\left(\sqrt{1+0}+1\right)^3}=\frac{2^5}{2^3}=4\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 4.

192. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6\right)^2}{\left(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9\right)^5}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując w mianowniku wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

a w liczniku wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6\right)^2}{\left(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9\right)^5}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^7}{\left(n^{18}+n^7\right)^{2/3}+n^6\cdot\left(n^{18}+n^7\right)^{1/3}+n^{12}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{n^{18}+n^7}+n^9}{n^7}\right)^5=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{-5}}{\left(1+n^{-11}\right)^{2/3}+\left(1+n^{-11}\right)^{1/3}+1}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{1+n^{-11}}+1}{n^{-2}}\right)^5=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left(\left(1+n^{-11}\right)^{2/3}+\left(1+n^{-11}\right)^{1/3}+1\right)^2}\cdot\frac{n^{-10}}{n^{-10}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-11}}+1\right)^5}{\left(\left(1+n^{-11}\right)^{2/3}+\left(1+n^{-11}\right)^{1/3}+1\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{1+0}+1\right)^5}{\left((1+0)^{2/3}+(1+0)^{1/3}+1\right)^2}=\frac{2^5}{3^2}=\frac{32}{9}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 32/9.

193. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^{12}+n}+n^6}\cdot\left(\frac{\sqrt{n^4+n}+n^2}{n}\right)^k=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-5}}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+n^{-3}}+1}{n^{-1}}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-3}}+1\right)^k}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot\frac{n^{-5}}{n^{-k}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-3}}+1\right)^k}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot n^{k-5}=\frac{2^k}{2}=2^{k-1},$$

o ile $k-5=0$, czyli $k=5$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 16 dla $k=5$.

194! Wskaż liczbę naturalną k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{14}+9n^9+1}-n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy występujące pod znakiem granicy wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości, a następnie dzielimy licznik i mianownik przez n^9:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{14}+9n^9+1}-n^7}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^9+1}{n^k\cdot\left(\sqrt{n^{14}+9n^9+1}+n^7\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9+n^{-9}}{n^{k-2}\cdot\left(\sqrt{1+9n^{-5}+n^{-14}}+1\right)}.$$

Dla $k=2$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9+n^{-9}}{\sqrt{1+9n^{-5}+n^{-14}}+1}=\frac{9+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{9}{2}\,.$$

Odpowiedź: Przy $k=2$ granica jest równa $9/2$.

Uwaga: Liczba $k=2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Jednak zgodnie z poleceniem wystarczyło wskazać k, bez konieczności uzasadnienia, że takie k jest tylko jedno.

195. Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$ przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\frac{1}{\sqrt{n^{666}+1}+n^{333}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\sqrt{n^{666}+1}+n^{333}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{333}\cdot\left(\sqrt{1+n^{-666}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-333}}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}\,.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 2 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=333$. Dla $k=333$ mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-333}}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^{-666}}+1}=\frac{1}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dla $k=333$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/2$.

196. Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}$$

przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}+n^{222}\right)\cdot\left(\sqrt{n^{888}+1}+n^{444}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}+n^{222}\right)\cdot\left(\sqrt{n^{888}+1}+n^{444}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{666}\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-666}}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}\,.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 4 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=666$. Dla $k=666$ mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-666}}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{1+n^{-888}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+n^{-888}}+1\right)}=\frac{1}{4}\,.$$

Odpowiedź: Dla $k=666$ dana w zadaniu granica ma wartość 1/4.

197! Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^{666}+n^k}-n^{222}\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^{666}+n^k}-n^{222}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\left(n^{666}+n^k\right)^{2/3}+n^{222}\cdot\left(n^{666}+n^k\right)^{1/3}+n^{444}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-444}}{\left(1+n^{k-666}\right)^{2/3}+\left(1+n^{k-666}\right)^{1/3}+1}\,.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 3 przy n dążącym do nieskończoności (o ile $k<666$), natomiast licznik jest równy 1, gdy $k=444$.
Dla $k=444$ mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k-444}}{\left(1+n^{k-666}\right)^{2/3}+\left(1+n^{k-666}\right)^{1/3}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+n^{-222}\right)^{2/3}+\left(1+n^{-222}\right)^{1/3}+1}=\frac{1}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dla $k=444$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/3$.

198! Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+6n^3}-n^2-3n\right)\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+6n^3}-n^2-3n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+6n^3}-\left(n^2+3n\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+6n^3-\left(n^2+3n\right)^2}{\sqrt{n^4+6n^3}+n^2+3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+6n^3-n^4-6n^3-9n^2}{\sqrt{n^4+6n^3}+n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-9n^2}{\sqrt{n^4+6n^3}+n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-9}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1+\frac{3}{n}}=-\frac{9}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-9/2$.

199! Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^{24}+n^{11}}-n^6}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}-n^{12}\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Stosując na poziomie mianownika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

a na poziomie licznika wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)\cdot(a+b)}\,,$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^{24}+n^{11}}-n^6}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}-n^{12}\right)^k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{11}}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}+n^{12}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^{24}+n^{11}}+n^6\right)}\cdot\left(\frac{\sqrt{n^{24}+n^{11}}+n^{12}}{n^{11}}\right)^k=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-7}}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-13}}+1\right)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+n^{-13}}+1}{n^{-1}}\right)^k=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^k}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-13}}+1\right)}\cdot\frac{n^{-7}}{n^{-k}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)^k}{\left(\sqrt{1+n^{-13}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+n^{-13}}+1\right)}\cdot n^{k-7}=\frac{2^k}{2\cdot 2}=2^{k-2}\,,$$

o ile $k-7=0$, czyli $k=7$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 32 dla $k=7$.

200! Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k. Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n}{3}\right)=\mathbf{1/6}$ dla $k=\mathbf{-3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n+4}{n}\right)=\mathbf{1/24}$ dla $k=\mathbf{-4}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n}{4}\right)=\mathbf{2/3}$ dla $k=\mathbf{-4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2}{5}\right)=\mathbf{4/15}$ dla $k=\mathbf{-5}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2020}{6}\right)=\mathbf{4/45}$ dla $k=\mathbf{-6}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{2}}{2}\right)=\mathbf{1/8}$ dla $k=\mathbf{-4}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{2}\right)=\mathbf{2}$ dla $k=\mathbf{-4}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{2}}{3}\right)=\mathbf{1/48}$ dla $k=\mathbf{-6}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{3}\right)=\mathbf{4/3}$ dla $k=\mathbf{-6}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{3}}{2}\right)=\mathbf{1/72}$ dla $k=\mathbf{-6}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{4}\right)=\mathbf{2/3}$ dla $k=\mathbf{-8}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{4}}{3}\right)=\mathbf{4/81}$ dla $k=\mathbf{-12}$