Kolokwium nr 2: środa 30.10.2024, godz. 8:30-10:00, materiał zad. 1–200.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w czwartek 24.10.2024 i poniedziałek 28.10.2024.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

W pierwszej kolejności należy omówić zadania z wykrzyknikiem.

4. Ciągi liczbowe, granica.

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobierz odpowiednie stałe g oraz C i udowodnij, że nierówności $g-C/n<W(n)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

178. $\dfrac{n^5+n^4+1}{2n^5+n^3+5}$ **179.** $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ **180!** $\dfrac{\sqrt{4n^4+1}}{n^2+1}$ **181.** $\sqrt{n^2+4n}-n$

182! $\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\dfrac{n}{n^2+3}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}$ **183!** $\sqrt[4]{n^4+n^3}-n$

Dla podanego wyrażenia $W(n,k)$ dobierz odpowiednią wartość parametru k i odpowiednie stałe dodatnie g oraz C i udowodnij, że nierówności $g-C/n<W(n,k)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

184! $\dfrac{\sqrt{n^k+1}}{n^6+n^5}$ **185!** $\dfrac{\sqrt{n^6+n^5}}{n^k+1}$ **186!** $\sqrt{n^8+n^k}-n^4$ **187!** $\sqrt{n^4+n^3}-n^2-kn$

188! Ciąg o wyrazach całkowitych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ....

189! Dla których liczb naturalnych $k\geqslant 2$ ze zbieżności ciągu $\left(a_n^k\right)$ wynika zbieżność ciągu (a_n)?

190! Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^6+n^5+1}-n^3}{\sqrt[4]{n^6+n^5+1}-n^2}\,.$$

191. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^{16}+n^3}-n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16}+n^5}-n^8\right)^5}\,.$$

192. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6\right)^2}{\left(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9\right)^5}.$$

193. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

194! Wskaż liczbę naturalną k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{14}+9n^9+1}-n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

195. Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

196. Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\left(\sqrt[4]{n^{888}+1}-n^{222}\right)\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

197! Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^{666}+n^k}-n^{222}\right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość granicy przy tak wybranej liczbie k.

198! Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+6n^3}-n^2-3n\right).$$

199! Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^{24}+n^{11}}-n^6}{\left(\sqrt{n^{24}+n^{11}}-n^{12}\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

200! Wskaż liczbę rzeczywistą k, dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k. Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n}{3}\right)=$ .... dla $k=$ ....

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{n+4}{n}\right)=$ .... dla $k=$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n}{4}\right)=$ .... dla $k=$ ....

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2}{5}\right)=$ .... dla $k=$ ....

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{2n+2020}{6}\right)=$ .... dla $k=$ ....

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{2}}{2}\right)=$ .... dla $k=$ ....

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{2}\right)=$ .... dla $k=$ ....

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{2}}{3}\right)=$ .... dla $k=$ ....

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{3}\right)=$ .... dla $k=$ ....

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{n}{3}}{2}\right)=$ .... dla $k=$ ....

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{2}}{4}\right)=$ .... dla $k=$ ....

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^k\cdot\binom{\binom{2n}{4}}{3}\right)=$ .... dla $k=$ ....

Obliczanie granic ciągów – podstawowe fakty.

1. Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

2. Granica sumy jest sumą granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n+b_n) jest zbieżny i
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

3. Granica różnicy jest różnicą granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n-b_n) jest zbieżny i
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

4. Granica iloczynu jest iloczynem granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_nb_n) jest zbieżny i
$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

5. Granica ilorazu jest ilorazem granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n\neq 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\ .$$

6. Zbieżność i granica nie zależą od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów ciągu.

7. Słabe nierówności zachowują się przy przejściu do granicy.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym dla każdego n zachodzi nierówność $a_n\leqslant b_n$ (odpowiednio $a_n\geqslant b_n$), to $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ (odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$).

8. Kilka podstawowych granic.
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$
$\lim\limits_{n\to\infty}a=a$
$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ dla $|a|<1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ dla $a>0$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

9. Z granicą można wchodzić pod pierwiastek.
Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n\geqslant 0$, to dla $k\in\mathbb{N}$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}a_n}\ .$$
Dla nieparzystych k warunek $a_n\geqslant 0$ można pominąć.